CALCUL

DES

PROBABILITÉS

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
46829 Quai des Grands-Augustins, 55.

CALCUL

DES

PROBABILITÉS

PAR

Louis BACHELIER,

Docteur ès sciences.

TOME I.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

PRÉFACE.

Cet Ouvrage n'a pas seulement pour but d'exposer, avec quelques développements, l'ensemble des connaissances acquises dans le passé sur le calcul des probabilités, il a aussi pour objet de faire connaître de nouvelles méthodes et de nouveaux résultats qui représentent, à certains points de vue, une transformation complète de ce calcul.

La conception des probabilités continues constitue la base de ces nouvelles études. On pensait précédemment que seules des formules discontinues pouvaient être des conséquences exactes des principes du calcul des probabilités, et cette idée était d'autant plus naturelle que les problèmes traités alors ne pouvaient admettre d'autres genres de solutions.

On employait bien parfois des formules continues mais on les considérait comme approchées, de sorte qu'elles ne pouvaient servir de base pour de nouvelles recherches. Pour cette raison, leur emploi ne s'est pas généralisé depuis Laplace.

L'idée de considérer les probabilités comme continues fut seulement envisagée il y a quelques années lorsque je me proposai de résoudre des questions ne pouvant admettre que des solutions continues exactes.

La théorie édifiée alors était assez particulière, des ébauches publiées dans différents Recueils indiquent le cours de son évolution; généralisée successivement dans tous les sens, elle a pris un tel développement qu'il m'a semblé nécessaire de la

présenter sous une forme suffisamment explicite pour qu'elle soit à la portée de tous les mathématiciens.

On conçoit l'avantage qu'on peut tirer de la considération des probabilités continues. Leur théorie ne dépend pas des probabilités discontinues, elle est mathématiquement exacte et ne procède pas par approximations.

L'emploi direct et immédiat, pour toutes les questions, du calcul infinitésimal, beaucoup plus simple que le calcul des quantités finies, permet de résoudre des problèmes qui, par leur difficulté et leur complication, seraient inabordables avec les méthodes ordinaires.

Le premier mérite de la théorie consiste dans le nombre des résultats nouveaux qu'elle a permis d'obtenir et dans le degré de difficulté des questions qu'elle a étudiées.

Un autre avantage des probabilités continues est de résoudre effectivement les problèmes en donnant pour solutions, non des formules pratiquement incalculables, mais des formules facilement réductibles en nombres.

La conception de l'unité du calcul des probabilités constitue l'une des bases de notre étude; elle a permis de faire de la théorie des probabilités continues une science générale et méthodique; elle a permis de classer les problèmes d'après leurs caractères réels, de sorte que leur étude forme une chaîne ininterrompue de déductions se suivant dans un ordre naturel et logique.

La théorie des probabilités continues a donné naissance à une assimilation des plus curieuses entre ce qu'on pourrait appeler le mouvement ou la transformation des probabilités et certains phénomènes physiques tels que la diffusion de la chaleur. Cette théorie devrait, logiquement, servir d'introduction à l'étude de la Physique mathématique, non seulement parce

que la connaissance des lois du hasard supplée bien souvent à notre ignorance des lois de la nature, mais aussi parce que cette théorie, basée sur des conceptions purement mathématiques et non sur des hypothèses, est cependant assimilable à la théorie des phénomènes les plus simples qu'étudie la philosophie naturelle.

Les cinq premiers Chapitres de cet Ouvrage sont consacrés aux probabilités discontinues; ils contiennent le développement de mes travaux personnels sur ce sujet et l'exposition presque complète des problèmes considérés comme classiques. Beaucoup d'entre eux ont été l'objet de simplifications.

On ne trouvera, dans ce premier Volume, aucune étude sur l'histoire ou sur la philosophie du calcul des probabilités; ces questions seront traitées dans les Volumes suivants avec toute l'étendue que mérite leur intérêt.

En rédigeant ce Livre, j'ai tenu à ne jamais m'écarter de ce que je considère comme constituant la théorie générale du calcul des probabilités; je me suis aussi efforcé de dégager ce calcul de tout appareil analytique; c'est, je crois, le meilleur moyen d'en faire comprendre l'esprit et d'en faire apprécier la très réelle beauté.



CALCUL

DES

PROBABILITÉS

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES PROBABILITÉS.

1. On appelle *probabilité* d'un événement le rapport du nombre des cas favorables à l'arrivée de cet événement au nombre total des cas possibles.

La probabilité d'amener le point quatre, par exemple, avec un dé est $\frac{1}{6}$ parce que six cas peuvent se présenter quand le dé est jeté sur le tapis et qu'un seul est favorable à l'arrivée du point quatre. La probabilité de retourner un roi sur un jeu de 32 cartes est $\frac{1}{8}$: il y a en effet 32 cas possibles et 4 favorables; la probabilité est donc $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Cette définition de la probabilité suppose toujours que les cas sont également vraisemblables.

Dans le premier exemple donné ci-dessus, il faudrait se garder de dire : le dé peut montrer le point quatre ou il peut montrer un autre point, il y a donc deux cas possibles dont un favorable, la probabilité est $\frac{1}{2}$. Les deux cas possibles ne sont pas également vraisemblables.

La probabilité est toujours comprise entre zero et un; cette dernière valeur correspond à la certitude.

Dans le langage ordinaire, on dit qu'un événement a neuf *chances* sur dix de se produire pour exprimer que sa probabilité est 0,9.

Dans le calcul des probabilités, il est constamment fait usage de deux principes : l'un est relatif à l'addition des probabilités, l'autre à leur multiplication.

2. Principe de la probabilité totale. — *Si l'on partage les cas favorables à l'arrivée d'un événement en différents groupes, la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités pour qu'il appartienne à chacun des groupes.*

On additionne en effet des fractions de même dénominateur en additionnant les numérateurs.

Le choix des groupes est arbitraire, sous la condition de comprendre dans ces groupes tous les cas possibles sans qu'aucun s'y rencontre deux fois.

La probabilité d'amener avec deux dés une somme de points supérieure à dix est égale à la somme des probabilités pour amener 11 ou 12.

La probabilité d'amener le point 2 ou le point 5 avec deux dés n'est pas représentée par la probabilité pour amener 2 ajoutée à la probabilité pour amener 5. On peut, en effet, les amener tous deux; le point 2,5 considéré une première fois comme contenant 2 ne doit pas être compté une seconde fois comme contenant 5.

3. Principe de la probabilité composée. — *Lorsqu'un événement* E *dépend du concours de deux autres,* E_1, E_2, *et que l'arrivée de* E_2 *est subordonnée à celle de* E_1, *la probabilité de* E *est égale au produit de la probabilité de* E_1 *par la probabilité qu'acquiert* E_2 *quand on suppose* E_1 *arrivé.*

Soit en effet μ le nombre des cas qui peuvent se présenter quand on attend l'événement E; sur ces μ cas, il y en a, par exemple, m favorables à l'arrivée de E_1 et, parmi ces m cas, n favorables à l'arrivée de E_2, la probabilité de E est $\frac{n}{\mu}$; or

$$\frac{n}{\mu} = \frac{m}{\mu}\,\frac{n}{m},$$

$\frac{m}{\mu}$ est la probabilité de E_1 et $\frac{n}{m}$ est la probabilité qu'acquiert E_2 quand on suppose E_1 arrivé : le principe est donc démontré.

4. En particulier : *Si les événements* E_1, E_2 *sont indépendants, la probabilité de* E *sera égale au produit des probabilités de* E_1 *et* E_2.

Ce principe serait encore vrai dans le cas d'un événement composé dépendant de plusieurs événements E_1, E_2, E_3, ...

On a souvent commis des erreurs en confondant le cas particulier de la probabilité composée avec le cas général, et en considérant comme indépendantes des probabilités qui ne l'étaient pas.

5. *La probabilité d'un événement étant p, quelle est la probabilité pour que l'événement ne se produise pas en n épreuves.*

La probabilité pour que l'événement ne se produise pas à la première épreuve est $1-p$.

La probabilité pour qu'il ne se produise ni à la première ni à la seconde épreuve est égale, d'après le principe de la probabilité composée, au produit de la probabilité pour qu'il ne se produise pas à la première épreuve, multipliée par la probabilité pour que, ne s'étant pas produit à la première épreuve, il ne se produise pas à la seconde; c'est-à-dire est égale à $(1-p)^2$; etc.

La probabilité pour que l'événement ne se produise pas en n épreuves est donc

$$(1-p)^n.$$

Cette probabilité décroît constamment lorsque n croît; la probabilité de l'arrivée de l'événement s'approche donc de la certitude.

La probabilité pour que, en n épreuves, l'événement de probabilité p se produise au moins une fois est

$$1-(1-p)^n.$$

6. Nous avons supposé que les n épreuves étaient identiques et que la probabilité de l'événement était p à chaque épreuve.

Si la probabilité de l'événement était p_1 à la première épreuve, p_2 à la deuxième, p_3 à la troisième, etc., p_1, p_2, p_3, ... étant indépendants,

la probabilité pour que l'événement ne se produise pas une seule fois en n épreuves serait, en vertu du principe des probabilités composées,

$$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\ldots(1-p_n).$$

Si les événements dépendaient les uns des autres, la probabilité pour qu'aucun événement ne se produise s'exprimerait toujours par la même formule, mais les quantités p n'auraient plus la même signification : p_1 serait la probabilité pour que l'événement se produise à la première épreuve, p_2 serait la probabilité pour que l'événement se produise à la deuxième épreuve dans l'hypothèse où il ne se serait pas produit à la première, p_3 serait la probabilité pour que l'événement se produise à la troisième épreuve dans l'hypothèse où il ne se serait pas produit à la première ni à la deuxième épreuve, etc.

7. *Dans un jeu de 32 cartes, on tire deux cartes au hasard, quelle est la probabilité de tirer deux rois?*

Le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 32 objets 2 à 2, c'est-à-dire : $\frac{32.31}{2}$; le nombre des cas favorables est celui des combinaisons de 4 objets 2 à 2, c'est-à-dire : $\frac{4.3}{2}$; la probabilité cherchée est donc : $\frac{4.3}{32.31}$.

On peut aussi résoudre cette question en employant le principe de la probabilité composée : la probabilité pour retourner deux rois est égale au produit de la probabilité pour retourner un roi au premier tirage multipliée par la probabilité pour que, ayant déjà retourné un roi, on en tourne un second au second tirage. La probabilité de tourner deux rois est donc : $\frac{4}{32}\frac{3}{31}$ puisque, au second tirage, il reste 31 cartes dont 3 rois.

Dans les mêmes conditions, la probabilité pour tirer au moins un roi est égale à la probabilité pour retourner un roi au premier tirage, plus la probabilité pour en amener un au second tirage si, au premier, on n'a pas retourné un roi, c'est donc : $\frac{4}{32}+\frac{28}{32}\frac{4}{31}$.

On peut encore dire : la probabilité pour amener au moins un roi est égale à l'unité diminuée de la probabilité pour n'amener aucun

roi, c'est-à-dire diminuée de $\frac{28}{32}\cdot\frac{27}{31}$. La probabilité cherchée est donc $1 - \frac{28}{32}\cdot\frac{27}{31}$.

8. On mêle plusieurs jeux de 32 cartes; quelle est la probabilité de tirer quatre cartes noires de suite?

Si le nombre des jeux de cartes était infini, la probabilité de tirer une carte noire étant à chaque tirage $\frac{16}{32}$, la probabilité de tirer quatre noires de suite serait d'après le principe des probabilités composées $\left(\frac{16}{32}\right)^4$.

Si l'on opère sur un seul jeu de 32 cartes, la probabilité de retourner quatre noires est d'après le même principe

$$\frac{16}{32}\,\frac{15}{31}\,\frac{14}{30}\,\frac{13}{29}.$$

S'il y a m jeux de cartes, la probabilité est

$$\frac{16m}{32m}\,\frac{16m-1}{32m-1}\,\frac{16m-2}{32m-2}\,\frac{16m-3}{32m-3}.$$

9. *D'un jeu de trente deux cartes on tire neuf cartes au hasard: quelle est la probabilité pour que, sur ces neuf cartes, il y ait exactement quatre cœurs?*

Le nombre des cas possibles est celui des combinaisons de 32 objets pris 9 à 9, c'est-à-dire

$$C_{\substack{9\\32}} = \frac{32.31.30.\ldots.24}{1.2.3.\ldots.9}.$$

Considérons une combinaison favorable de neuf cartes; combinant d'abord dans celle-ci tous les cœurs, on obtiendra $C_{\substack{4\\8}}$ combinaisons favorables différant uniquement par les cœurs. Dans chacune de celles-ci on peut ensuite combiner toutes les cartes qui ne sont pas des cœurs, ce qui donne $C_{\substack{5\\24}}$ combinaisons différentes.

Le nombre des combinaisons favorables est donc $C_{\substack{4\\8}} \times C_{\substack{5\\24}}$ et la proba-

bilité cherchée a pour valeur

$$\frac{C_8^4 \times C_{24}^5}{C_{32}^9}.$$

10. La probabilité pour qu'il y ait parmi les neuf cartes au moins quatre cœurs est la somme des probabilités pour qu'il y ait quatre, cinq, six, sept ou huit cœurs, c'est-à-dire

$$\frac{1}{C_{32}^9}(C_8^4 \times C_{24}^5 + C_8^5 \times C_{24}^4 + C_8^6 \times C_{24}^3 + C_8^7 \times C_{24}^2 + C_8^8 \times C_{24}^1).$$

La probabilité pour qu'il y ait moins de quatre cœurs est égale à la somme des probabilités pour qu'il y ait zéro, un, deux ou trois cœurs.

La probabilité pour qu'il y ait quatre cœurs et deux trèfles serait de même

$$\frac{C_8^4 \times C_8^2 \times C_{16}^3}{C_{32}^9}.$$

La théorie des combinaisons permet, comme on le voit, de résoudre simplement certaines questions de probabilités.

11. **Espérance mathématique.** — On appelle *espérance mathématique* d'un bénéfice éventuel le produit de ce bénéfice par la probabilité de le réaliser.

L'espérance mathématique est donc négative lorsqu'elle correspond à une perte.

L'*espérance mathématique totale* d'un joueur sera la somme des produits des bénéfices éventuels par les probabilités correspondantes.

Il est évident qu'un joueur n'est ni avantagé ni lésé si son espérance mathématique totale est nulle. On dit alors que le jeu est *équitable*.

L'*avantage absolu* d'un joueur est égal à la différence entre la somme de ses espérances positives et la somme de ses espérances négatives; l'avantage absolu est donc l'espérance mathématique totale; c'est la somme qu'on devrait équitablement donner au joueur si on l'empêchait de jouer, lorsque le jeu le favorise.

12. Si un jeu se compose de plusieurs parties, l'espérance mathé-

matique totale est la somme des espérances relatives aux diverses parties si celles-ci doivent certainement être jouées.

En particulier, si le jeu est identique à lui-même à chaque partie, l'espérance totale est égale au produit de l'espérance relative à une partie par le nombre des parties qui composent le jeu.

Si un jeu est équitable à chaque partie, il est équitable dans son ensemble.

Il n'existe donc aucune combinaison pouvant rendre avantageux ou désavantageux un jeu, qui, à chaque partie, est équitable.

13. La notion de l'espérance mathématique permet quelquefois de déterminer les probabilités. On peut citer comme exemple ce problème classique :

Deux joueurs font un nombre illimité de parties à un jeu dont les conditions sont équitables; leurs fortunes sont m et n; quelle est, pour chacun d'eux, la probabilité de ruiner l'autre?

Pour simplifier le langage, on appelle *fortune d'un joueur* la somme totale qu'il consacre au jeu; lorsqu'il a perdu cette somme, on dit qu'il est ruiné.

Dans le problème qui nous occupe, nous supposons que, après chaque partie, le perdant verse son enjeu au gagnant.

Soit P la probabilité pour que le premier joueur ruine son adversaire; son espérance positive est Pn, son espérance négative est $-(1-P)m$. Le jeu étant équitable, l'espérance totale est nulle, et l'on a

$$Pn-(1-P)m=0,$$

d'où

$$P=\frac{m}{m+n};$$

on aurait de même

$$1-P=\frac{n}{m+n}.$$

Les probabilités de gain des joueurs sont proportionnelles aux sommes qu'ils jouent.

14. On étendrait facilement ce résultat au cas de trois joueurs, en

supposant que le jeu se termine lorsque deux d'entre eux sont ruinés. Si leurs fortunes sont m, n, r, la probabilité pour que le premier d'entre eux ruine les autres est

$$\frac{m}{m+n+r}.$$

On traiterait de même le cas d'un nombre quelconque de joueurs.

15. Lorsque deux joueurs ne se fixent pas d'avance un nombre maximum de parties, leurs probabilités de ruine sont inversement proportionnelles aux sommes qu'ils jouent; il en résulte que le plus pauvre d'entre eux sera vraisemblablement ruiné. Celui qui joue équitablement contre tout adversaire qui se présente se trouve dans les mêmes conditions que s'il jouait contre un adversaire très riche; sa ruine est à peu près certaine. La probabilité de sa ruine s'approche de la certitude en même temps que le gain espéré par lui croît indéfiniment.

16. **Valeurs moyennes.** — Soit p_1 la probabilité pour qu'une certaine quantité a soit égale à a_1.

Soit p_2 la probabilité pour qu'une certaine quantité a soit égale à a_2....

Soit p_n la probabilité pour qu'une certaine quantité a soit égale à a_n.

La *valeur moyenne absolue* ou simplement la *valeur moyenne* de a est, par définition, la quantité

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n.$$

La valeur moyenne de a est donc l'espérance mathématique d'un joueur à qui l'on promettrait une somme égale à a.

On peut encore dire : La valeur moyenne d'une quantité est la somme des produits des différentes valeurs de cette quantité par leurs probabilités respectives.

17. Soit μ le nombre des cas possibles, de sorte que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots + p_\mu = 1,$$

on peut écrire comme suit la valeur moyenne absolue de a :

$$\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots + p_\mu}.$$

La *valeur moyenne relative* de a est, par définition, la quantité

$$\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

La valeur moyenne absolue se rapporte donc au nombre total des cas, la valeur moyenne relative au nombre des cas favorables.

18. Supposons, par exemple, que la quantité a soit susceptible de prendre les sept valeurs

$$-3, \quad -2, \quad -1, \quad +1, \quad +2, \quad +3, \quad +4,$$

auxquelles correspondent les probabilités

$$\frac{1}{14}, \quad \frac{2}{14}, \quad \frac{1}{14}, \quad \frac{2}{14}, \quad \frac{2}{14}, \quad \frac{1}{14}, \quad \frac{2}{14}.$$

La valeur moyenne absolue de a est

$$-\frac{3}{14} - \frac{4}{14} - \frac{1}{14} + \frac{2}{14} + \frac{4}{14} + \frac{3}{14} + \frac{8}{14} = \frac{9}{14}.$$

La valeur moyenne absolue des a négatifs est

$$-\frac{3}{14} - \frac{4}{14} - \frac{1}{14} = -\frac{8}{14}.$$

La valeur moyenne absolue des a positifs est de même $\frac{17}{14}$.

La valeur moyenne absolue du module de a est $\frac{25}{14}$.

La valeur moyenne relative est égale à la valeur moyenne absolue divisée par la somme des probabilités correspondant aux cas favorables. La valeur moyenne absolue de a étant $\frac{9}{14}$, et la somme des probabilités correspondant aux cas favorables étant $\frac{11}{14}$, la valeur moyenne relative de a est

$$\frac{9}{14} : \frac{11}{14} = \frac{9}{11}.$$

La valeur moyenne relative des a négatifs est de même

$$-\frac{8}{14} : \frac{4}{14} = -2.$$

La valeur moyenne relative des a positifs est

$$\frac{17}{14} : \frac{7}{14} = \frac{34}{14}.$$

La valeur moyenne relative du module de a est

$$\frac{25}{14} : \frac{11}{14} = \frac{25}{11}.$$

Dans ce qui suivra, lorsque nous parlerons de la valeur moyenne, il faudra entendre qu'il s'agit de la valeur moyenne absolue.

19. Lorsqu'une quantité a est susceptible de prendre les n valeurs (rangées par ordre de croissance)

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k, \quad a_{k+1}, \quad \ldots, \quad a_n$$

auxquelles correspondent les probabilités

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_k, \quad p_{k+1}, \quad \ldots, \quad p_n,$$

on dit que la *valeur probable* de a est comprise entre a_k et a_{k+1} si l'on a

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k < \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{2}$$

et

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k+1} > \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{2}.$$

En termes moins précis, la valeur probable d'une quantité est celle qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassée.

Dans l'exemple traité précédemment (n° 18), la valeur probable de a est comprise entre -1 et -1.

20. Il ne faut pas confondre la valeur moyenne ni la valeur probable d'une quantité avec la *valeur la plus probable* de cette quantité.

D'ailleurs la valeur de probabilité maxima est toujours une valeur

possible de la quantité considérée; au contraire, la valeur moyenne n'est généralement pas une valeur possible.

Quant à la valeur probable, en dehors du cas des probabilités continues, elle n'est généralement pas déterminée.

21. Si la probabilité d'un événement est p à chaque épreuve, la valeur moyenne du nombre des arrivées de cet événement en μ épreuves est μp.

En effet, si un joueur devait recevoir 1 fr. chaque fois que l'événement se produit, son espérance, pour chaque épreuve, serait p et pour μ épreuves elle serait μp.

Si la probabilité d'un événement est p_1 à la première épreuve, p_2 à la deuxième, ... p_μ à la $\mu^{\text{ième}}$, la valeur moyenne du nombre des arrivées de cet événement dans ces μ épreuves est $p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu$.

En effet, si un joueur devait recevoir 1 fr. chaque fois que l'événement se produit, son espérance serait $p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu$.

22. Si la probabilité d'un événement est p à chaque épreuve, la valeur moyenne du nombre des épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement se produise est $\frac{1}{p}$.

La probabilité pour que l'événement se produise à la première épreuve est p.

La probabilité pour qu'il se produise à la seconde épreuve ne s'étant pas produit à la première est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$(1-p)p = qp.$$

La probabilité pour que l'événement se produise à la troisième épreuve ne s'étant pas produit à la première ni à la seconde est q^2p.

La probabilité pour que l'événement se produise pour la première fois à la $n^{\text{ième}}$ épreuve est $q^{n-1}p$.

La valeur moyenne cherchée est l'espérance mathématique d'un joueur qui toucherait 1 fr. si l'événement se produisait à la première épreuve, 2 fr. s'il se produisait à la deuxième, ... n francs s'il se produisait pour la première fois à la $n^{\text{ième}}$. La valeur moyenne est donc

$$p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \ldots.$$

On ramène facilement cette série à des progressions géométriques, sa valeur est $\frac{1}{p}\cdot$

On peut obtenir ce résultat par une méthode plus simple : Soit u la valeur moyenne du nombre des épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement de probabilité p se produise, on a

$$u = 1 + (1 - p)u.$$

En effet, la première épreuve a nécessairement lieu et ce fait est exprimé par le chiffre 1. Si, à cette première épreuve, l'événement ne se produit pas (éventualité qui a pour probabilité $1 - p$), la valeur moyenne après cette épreuve est encore u ; l'égalité précédente est donc exacte, on en déduit $u = \frac{1}{p}\cdot$

23. **Addition et multiplication des valeurs moyennes.** — La valeur moyenne d'une somme est égale à la somme des valeurs moyennes de ses parties, c'est une conséquence immédiate de la définition.

La valeur moyenne relative d'une somme n'est pas égale à la somme des valeurs moyennes relatives de ses parties.

La valeur moyenne d'un produit *quand les facteurs sont indépendants* est le produit des valeurs moyennes des facteurs.

Ce principe est même vrai lorsqu'il s'agit de valeurs moyennes relatives. Soient x et y deux grandeurs, la valeur moyenne de la première est, je suppose,

$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

et celle de la seconde

$$\frac{q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots + q_m y_m}{q_1 + q_2 + \ldots + q_m};$$

leur produit peut s'écrire

$$\frac{\sum p_i q_{i'} x_i y_{i'}}{\sum p_i q_{i'}}.$$

Si la valeur x_i de x n'influe en rien sur la probabilité de la valeur $y_{i'}$

de y, $p_i\, q_{i'}$ est, d'après le principe de la probabilité composée, la probabilité pour que le produit xy ait la valeur $x_i\, y_{i'}$. Alors la quantité ci-dessus écrite est bien la valeur moyenne relative du produit xy, puisqu'elle est la somme des produits des valeurs xy par les probabilités correspondantes divisée par la somme des probabilités.

24. Si la valeur x_i de x influait sur la valeur $y_{i'}$ de y, la probabilité de $x_i y_{i'}$ ne serait plus $p_i q_{i'}$ et la valeur moyenne du produit ne serait plus égale au produit des valeurs moyennes.

Si, par exemple, $y = x$, la valeur x_i attribuée à x rend nécessaire la valeur x_i attribuée à y_i et par suite la valeur moyenne d'un carré n'est pas égale au carré de la valeur moyenne.

25. *La valeur moyenne d'un carré est toujours plus grande que le carré de la valeur moyenne.*

On a identiquement, puisque $\Sigma p_i = 1$,

$$\sum p_i x_i^2 - \Big(\sum p_i x_i\Big)^2 = \sum p_i p_k (x_i - x_k)^2.$$

Le premier terme est la moyenne du carré, le second est le carré de la moyenne; le second membre étant positif, le premier terme est toujours plus grand que le second, c'est ce qu'il fallait démontrer.

26. **Propriété additive des moyennes de carrés.** — La différence entre la moyenne du carré d'une somme de plusieurs quantités et le carré de la moyenne de cette somme possède une propriété remarquable : On a, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{VM}[(x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu)^2] - [\mathrm{VM}(x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu)]^2 \\
&\quad = [\mathrm{VM}\,x_1^2 + \ldots + \mathrm{VM}\,x_\mu^2 + 2\,\mathrm{VM}\,x_1 x_2 + \ldots + 2\,\mathrm{VM}\,x_{\mu-1} x_\mu] \\
&\quad - [(\mathrm{VM}\,x_1)^2 + \ldots + (\mathrm{VM}\,x_\mu)^2 + 2\,\mathrm{VM}\,x_1\,\mathrm{VM}\,x_2 + \ldots + 2\,\mathrm{VM}\,x_{\mu-1}\,\mathrm{VM}\,x_\mu].
\end{aligned}$$

Si les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ sont *indépendantes*,

$$\mathrm{VM}\,x_i x_k = \mathrm{VM}\,x_i\,\mathrm{VM}\,x_k$$

et l'égalité se réduit à

$$\mathrm{VM}\Big(\sum x_i\Big)^2 - \Big(\mathrm{VM}\sum x_i\Big)^2 = \sum [\mathrm{VM}\,x_i^2 - (\mathrm{VM}\,x_i)^2].$$

Le premier membre exprime la différence entre la moyenne du carré d'une somme et le carré de la moyenne de cette somme; le second membre désigne la somme des quantités analogues relatives à chacune des parties considérée isolément.

La valeur moyenne d'une somme est égale à la somme des valeurs moyennes de ses parties; c'est ce qu'on peut exprimer en disant que la valeur moyenne possède la propriété d'addition. La valeur moyenne du carré diminuée du carré de la valeur moyenne possède la même propriété d'addition lorsque les quantités additionnées sont indépendantes.

27. En particulier *quand plusieurs quantités sont indépendantes et quand leurs valeurs moyennes sont nulles, la valeur moyenne du carré de leur somme est égale à la somme des valeurs moyennes des carrés de ces quantités.*

En d'autres termes, dans le cas considéré, les valeurs moyennes des carrés possèdent la propriété d'addition.

Ce théorème est très important; il permet, comme nous allons le voir, de se faire une idée d'ensemble de la transformation des probabilités dans une suite d'épreuves quand celles-ci sont indépendantes les unes des autres.

28. **Application à la théorie du jeu.** — Supposons qu'un joueur A ait, à chaque partie, probabilité p_1 de perdre la somme α_1, probabilité p_2 de perdre la somme α_2, ..., probabilité p_n de perdre la somme α_n (α_1, α_2, ..., α_n peuvent être positifs ou négatifs).

Considérons d'abord le cas du jeu équitable, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n = -\mathcal{E}_1 = 0,$$

$\mathcal{E}_1$ désignant l'espérance mathématique pour une partie.

La valeur moyenne des carrés des gains et des pertes pour une partie ou, si l'on veut, des *écarts* pour une partie est

$$\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n = \mathrm{E}_1^2.$$

Les parties successives étant indépendantes, la valeur moyenne des carrés des écarts en gain ou en perte pour μ parties est, d'après le

théorème de l'addition des moyennes de carrés, égale au produit par μ de la quantité précédente.

En désignant par E^2 la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes pour μ parties, on a donc

$$E^2 = \mu E_1^2 = \mu(\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n).$$

Lorsqu'un jeu est équitable, la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes est proportionnelle au nombre des parties jouées.

Les carrés des écarts croissent donc, dans l'ensemble, proportionnellement à μ et les écarts croissent, dans l'ensemble, proportionnellement à $\sqrt{\mu}$.

Le théorème de l'addition des moyennes de carrés permet donc de se former une idée imprécise mais générale sur la croissance des écarts.

Nous verrons plus loin que les écarts croissent comme la racine carrée du nombre des épreuves, mais à la condition que le nombre des épreuves soit très grand.

29. Supposons maintenant que le jeune soit pas équitable; la valeur moyenne de la perte pour une partie est

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n = -\mathcal{E}_1;$$

pour μ parties, elle est

$$\mu(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n) = \mu\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}.$$

Si l'on forme la quantité

$$(\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n) - (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)^2 = E_1^2 - \mathcal{E}_1^2,$$

et si l'on multiplie cette quantité par μ, on obtient, d'après le théorème de l'addition des moyennes de carrés diminuées des carrés des moyennes, la différence entre la moyenne des carrés des gains et des pertes pour μ parties et le carré de la moyenne des pertes pour ces μ parties, c'est-à-dire $E^2 - \mathcal{E}^2$; on a donc

$$E^2 - \mathcal{E}^2 = \mu(E_1^2 - \mathcal{E}_1^2);$$

d'où l'on déduit, puisque $\mathcal{E} = \mu\mathcal{E}_1$

$$E^2 = \mu E_1^2 + \mu(\mu - 1)\mathcal{E}_1^2.$$

Telle est l'expression de la valeur moyenne E^2 des carrés des gains et des pertes pour μ parties.

30. On se rend mieux compte de la loi de la décroissance des gains et des pertes avec le nombre des parties en rapportant ces gains et ces pertes à la perte moyenne $-\mathcal{E}$: Soit z la perte réelle pour μ parties, posons

$$z + \mathcal{E} = x;$$

x est, pour μ parties, la différence entre la perte réelle et la perte moyenne ou, si l'on veut, x est l'écart pour μ parties.

Élevant au carré l'équation précédente, on obtient

$$z^2 + 2z\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 = x^2,$$

et, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\mathrm{VM}\,z^2 + 2\mathcal{E}\,\mathrm{VM}\,z + \mathcal{E}^2 = \mathrm{VM}\,x^2.$$

La valeur moyenne de z^2 est E^2, la valeur moyenne de z est $-\mathcal{E}$, l'égalité se réduit donc à

$$\mathrm{VM}\,x^2 = \mu(E_1^2 - \mathcal{E}_1^2).$$

Donc : La perte moyenne est proportionnelle au nombre des parties ; la valeur moyenne du carré de l'écart en plus ou en moins est également proportionnelle au nombre des parties.

31. On peut utiliser les mêmes théorèmes sur l'addition des moyennes de carrés pour le cas où les parties successives ne sont pas identiques (pourvu qu'elles soient indépendantes).

Supposons que, à la partie d'ordre i, il y ait probabilité $p_{1,i}$ pour perdre $\alpha_{1,i}$, probabilité $p_{2,i}$ pour perdre $\alpha_{2,i}$, ..., probabilité $p_{n,i}$ pour perdre $\alpha_{n,i}$.

La valeur moyenne de la perte pour la partie d'ordre i est

$$\alpha_{1,i}p_{1,i} + \alpha_{2,i}p_{2,i} + \ldots + \alpha_{n,i}p_{n,i} = -\mathcal{E}_i.$$

La valeur moyenne de la perte pour μ parties est

$$\sum_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_{1,i}p_{1,i} + \alpha_{2,i}p_{2,i} + \ldots + \alpha_{n,i}p_{n,i}) = \sum_{i=1}^{i=\mu} -\mathcal{E}_i = -\mathcal{E}.$$

Soit z la perte réelle pour μ parties, si l'on pose

$$z + \mathcal{E} = x,$$

x est l'écart : la valeur moyenne de x^2 est

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} [(\alpha_{1,i}^2 p_{1,i} + \alpha_{2,i}^2 p_{2,i} + \ldots + \alpha_{n,1}^2 p_{n,i}) - (\alpha_{1,i} p_{1,i} + \alpha_{2,i} p_{2,i} + \ldots + \alpha_{n,i} p_{n,i})^2].$$

En désignant par E_i^2 la quantité

$$E_i^2 = \alpha_{1,i}^2 p_{1,i} + \alpha_{2,i}^2 p_{2,i} + \ldots + \alpha_{n,i}^2 p_{n,i},$$

l'expression de la valeur moyenne de x^2 peut s'écrire

$$\text{VM}x^2 = \sum_{i=1}^{i=\mu} (E_i^2 - \mathcal{E}_i^2).$$

32. **Théorème de Bernoulli.** — La probabilité d'un événement est p à chaque épreuve, la probabilité de sa non-arrivée est $q = 1 - p$. On fait μ épreuves, la valeur moyenne du nombre des arrivées de l'événement est μp.

Si l'événement se produit $\mu p + x$ fois, on dit que l'*écart* est x.

Soit m le nombre des arrivées de l'événement, on a

$$m = \mu p + x,$$

m est nécessairement entier et μp est ordinairement fractionnaire, donc x est ordinairement fractionnaire. m peut prendre toutes les valeurs de zéro à μ, l'écart x peut donc prendre les $\mu + 1$ valeurs $-\mu p$, $-\mu p + 1$, $-\mu p + 2$, ..., $+\mu q$.

Si m est supérieur à μp l'écart est positif, il est négatif dans le cas contraire.

Nous allons calculer la valeur moyenne du carré de l'écart.

Imaginons un joueur A : faisons correspondre chaque partie de son jeu à chacune des épreuves et supposons que, à chaque partie, le joueur A perde une somme égale à l'augmentation de l'écart ou qu'il gagne une somme égale à la diminution de l'écart à l'épreuve correspondante ; la perte totale du joueur en μ parties est égale à l'écart en μ épreuves.

Supposons encore que l'écart soit x à l'épreuve d'ordre μ, nous allons étudier les variations de cet écart à l'épreuve suivante.

A cette épreuve, il y a probabilité p pour que l'événement se produise et, si cette éventualité se réalise, l'événement s'étant produit $\mu p + x + 1$ fois en $\mu + 1$ épreuves, l'écart sera devenu $x + 1 - p$ ou $x + q$. Sa valeur était précédemment x, elle a donc augmenté de la quantité q.

Il y a ainsi, à l'épreuve considérée, probabilité p pour que l'écart augmente de la quantité q et l'on verrait de même qu'il y a probabilité q pour qu'il diminue de la quantité p.

A chaque partie, le joueur A a donc probabilité p pour perdre la somme q et probabilité q pour gagner la somme p. Les parties successives de son jeu sont indépendantes et celui-ci est équitable; la valeur moyenne du carré des gains et des pertes est donc (n° 28)

$$\mu(qp^2 + pq^2) = \mu pq.$$

La valeur moyenne du carré de l'écart est donc μpq.

Les carrés des écarts croissent, dans l'ensemble, porportionnellement à μ et les écarts croissent, dans l'ensemble, proportionnellement à $\sqrt{\mu}$.

Les écarts croissent donc, dans l'ensemble, en valeur absolue, ils décroissent en valeur relative (relativement à μ). C'est, du moins dans son esprit, le *théorème de Bernoulli*.

33. On obtiendrait des résultats analogues en supposant les probabilités variables d'une épreuve à l'autre : Soient $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ les probabilités d'un événement à la première, la deuxième, ..., la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve et $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, ..., $q_\mu = 1 - p_\mu$ les probabilités de l'événement contraire: la valeur moyenne du nombre des arrivées de l'événement en μ épreuves est $p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu$. Si l'événement se produit $p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu + x$ fois, on dit que l'*écart* est x.

Pour calculer la valeur moyenne du carré de l'écart, on suppose, comme pour la question précédente, qu'un joueur A perde une somme égale à l'écart; à la $i^{\text{ième}}$ épreuve il a probabilité p_i de perdre la somme q_i et probabilite q_i de gagner la somme p_i, la valeur moyenne du carré de ses gains et de ses pertes, c'est-à-dire la valeur moyenne

du carré de l'écart est donc

$$\sum_{i=1}^{i=\mu}(p_i q_i^2 + q_i p_i^2) = \sum_{i=1}^{i=\mu} p_i q_i.$$

34. **Application aux erreurs d'observation.** — Lorsqu'on mesure plusieurs fois, avec soin, une même grandeur, pour fixer les idées une longueur, on obtient constamment des chiffres différents; l'écart qui existe entre la valeur exacte (et inconnue) et la valeur mesurée dans une observation est nommée l'*erreur* de cette observation.

Nous supposons que les chances d'erreur sont les mêmes pour toutes les observations et que les erreurs positives ont même probabilité que les erreurs négatives; alors la valeur moyenne de l'erreur est nulle.

Soit ε^2 la valeur moyenne du carré de l'erreur pour une observation; la valeur moyenne du carré de la somme z des erreurs commises sur μ observations est $\mu\varepsilon^2$.

Lorsqu'on a effectué μ mesures, dans l'ignorance où l'on est de la valeur exacte de la quantité mesurée, on adopte pour cette valeur la moyenne arithmétique des mesures.

Nous n'avons pas à discuter l'ensemble des considérations qui peuvent militer en faveur de ce choix; l'adoption de la moyenne arithmétique a l'avantage de donner une idée générale du degré d'exactitude du résultat.

Si la moyenne arithmétique des erreurs est y, la somme z des erreurs est μy; de l'égalité $z = \mu y$ on déduit

$$\text{VM}\, z^2 = \mu^2\, \text{VM}\, y^2.$$

La valeur moyenne de z^2 étant $\mu\varepsilon^2$, cette égalité se réduit à

$$\text{VM}\, y^2 = \frac{\varepsilon^2}{\mu}.$$

Donc : *La valeur moyenne du carré de l'erreur commise en prenant pour valeur de la quantité mesurée la moyenne arithmétique des mesures varie en raison inverse du nombre des observations.*

On peut dire que, dans l'ensemble, l'erreur commise en adoptant la règle de la moyenne arithmétique varie en raison inverse de la racine carrée du nombre des observations; cette loi de décroissance peut être précisée, comme nous le verrons, lorsque le nombre des observations est très grand.

La valeur moyenne du carré de l'erreur commise en adoptant la règle de la moyenne arithmétique diminuerait à l'infini avec le nombre des observations si, pour chacune d'elles en particulier, l'erreur moyenne était rigoureusement nulle. Cette condition est irréalisable pratiquement.

35. Les exemples précédents suffisent pour montrer que le théorème de l'addition des moyennes de carrés permet d'obtenir d'une façon très élémentaire des résultats d'ensemble sur certaines transformations des probabilités. Mais ce théorème suppose essentiellement que les quantites dont on additionne les moyennes de carrés sont indépendantes, autrement la règle d'addition n'est plus applicable. Il y a donc une différence essentielle entre la règle d'addition des moyennes et celle des moyennes de carrés; la première est toujours vraie, la seconde ne l'est que si les quantités considérées sont indépendantes.

36. **Calcul des valeurs moyennes.** — On ne calcule pas toujours une espérance mathématique ou une valeur moyenne par la formule qui sert de définition

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \ldots.$$

Dans bien des cas il est plus facile de calculer directement la valeur moyenne que chacun des termes dont elle est la somme.

Contentons-nous ici de donner un exemple, la suite de notre étude en fournira beaucoup d'autres.

La probabilité d'un événement étant p, quelle est la valeur moyenne du nombre des épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement se produise n fois?

Soit p_μ la probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement se soit produit précisément n fois, c'est-à-dire la probabilité pour que l'évé-

nement se soit produit $n-1$ fois dans les $\mu-1$ premières épreuves et une fois à la dernière épreuve.

La probabilité pour que, en $\mu-1$ épreuves, un événement de probabilité p se produise $n-1$ fois est (n° 42)

$$\frac{(\mu-1)!}{(n-1)!\,(\mu-n)!}\,p^{n-1}\,q^{\mu-n}.$$

(Le symbole $x!$ représente la factorielle $1.2.3.4\ldots\ldots x$. On doit remplacer par 1 le symbole $0!$).

La probabilité p_μ s'obtiendra en multipliant cette quantité par p puisque l'événement doit se produire à la dernière épreuve, on a donc

$$p_\mu = \frac{(\mu-1)!}{(n-1)!\,(\mu-n)!}\,p^n(1-p)^{\mu-n}$$

et la valeur moyenne cherchée est

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty}\frac{(\mu-1)!\,\mu}{(n-1)!\,(\mu-n)!}\,p^n(1-p)^{\mu-n}.$$

Cette expression peut s'écrire

$$\frac{p^n}{(n-1)!}\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty}\frac{\mu!}{(\mu-n)!}(1-p)^{\mu-n}$$

ou encore

$$\frac{p^n}{(n-1)!}\left[n!+\frac{(n+1)!}{1}(1-p)+\frac{(n+2)!}{1.2}(1-p)^2+\ldots\right],$$

ou enfin

$$np^n\left[1+\frac{n+1}{1}(1-p)+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}(1-p)^3+\ldots\right].$$

La quantité entre crochets est le développement de

$$[1-(1-p)]^{-(n+1)},$$

la valeur moyenne cherchée est donc

$$np^n[1-(1-p)]^{-(n+1)}=\frac{n}{p}.$$

On peut obtenir cette quantité par un procédé plus simple : soit u_x

la valeur moyenne quand x événements sont encore attendus et quand, par conséquent, $\mu - x$ événements se sont réalisés, on a

$$u_x = 1 + p u_{x-1} + (1-p) u_x.$$

En effet, x événements étant attendus, la prochaine épreuve augmentera nécessairement la valeur moyenne d'une unité. Cette épreuve ayant lieu, deux cas sont possibles : ou l'événement se produit et la valeur moyenne n'est plus que u_{x-1}, ou l'événement ne se produit pas et la valeur moyenne conserve la valeur u_x.

La première éventualité ayant pour probabilité p et la seconde pour probabilité q, l'équation qui précède n'est que l'expression des principes des probabilités composées et totales. On peut écrire cette équation

$$u_x \quad - u_{x-1} = \frac{1}{p};$$

on a de même

$$u_{x-1} - u_{x-2} = \frac{1}{p},$$

$$u_{x-2} - u_{x-3} = \frac{1}{p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_1 \quad - u_0 \quad = \frac{1}{p}.$$

En additionnant ces égalités et en remarquant que u_0 est nul, on obtient

$$u_x = \frac{x}{p},$$

u_x étant la valeur moyenne quand x événements sont encore attendus,

$$u_n = \frac{n}{p}$$

est la valeur moyenne du nombre des épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement de probabilité p se produise n fois.

On peut obtenir le même résultat par un raisonnement très simple : La valeur moyenne pour un seul événement (n° 22) est $\frac{1}{p}$.

Quand cet événement s'est produit une fois, la valeur moyenne du

nombre des épreuves qu'il faut tenter pour qu'il se produise encore une fois est $\frac{1}{p}$; la valeur moyenne pour deux événements est donc $\frac{2}{p}$ et pour n événements elle est $\frac{n}{p}$.

La suite des égalités écrites ci-dessus n'est d'ailleurs que l'expression, sous une forme différente, du raisonnement qui vient d'être employé.

Pour le problème qui va suivre, il semble très pénible d'obtenir la valeur moyenne d'après sa définition; on la détermine au contraire très facilement pour les deux dernières méthodes dont il vient d'être fait usage.

37. *Une urne contient m boules blanches et n boules noires; on extrait ces boules au hasard une à une en remettant dans l'urne la boule sortie quand elle est noire. Quelle est la valeur moyenne du nombre des tirages qu'il faudra effectuer pour que toutes les boules blanches soient sorties.*

Désignons par u_x le nombre moyen des tirages à effectuer quand x boules blanches sont encore dans l'urne; on a

$$u_x = 1 + \frac{x}{n+x} u_{x-1} + \frac{n}{n+x} u_x.$$

En effet, le nombre moyen des tirages comprendra le tirage prochain qui nécessairement aura lieu; puis deux cas pourront se présenter : ou la boule sortie sera blanche et le nombre moyen des tirages sera u_{x-1}, ou la boule sera noire et le nombre moyen sera u_x. La première éventualité a pour probabilité $\frac{x}{n+x}$ puisqu'il y a x boules blanches et $n+x$ boules en tout, la seconde a pour probabilité $\frac{n}{n+x}$.

L'équation qui précède n'est que l'expression des principes des probabilités composées et totales.

On en déduit

$$u_x - u_{x-1} = \frac{n+x}{x}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
u_m - u_{m-1} &= \frac{n+m}{m},\\
u_{m-1} - u_{m-2} &= \frac{n+m-1}{m-1},\\
u_{m-2} - u_{m-3} &= \frac{n+m-2}{m+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_2 - u_1 &= \frac{n+2}{2},\\
u_1 - u_0 &= \frac{n+1}{1}.
\end{aligned}$$

En additionnant et en remarquant que $u_0 = 0$, on a

$$u_m = \frac{n+m}{m} + \frac{n+m-1}{m-1} + \frac{n+m-2}{m-2} + \ldots + \frac{n+1}{1}$$

ou

$$u_m = m + n\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right].$$

38. On peut encore obtenir cette quantité par le raisonnement suivant : lorsque la probabilité d'un événement est p (nº 22) la valeur moyenne du nombre des épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement se produise est $\frac{1}{p}$, le nombre moyen des tirages qu'il faut effectuer pour obtenir une première boule blanche est donc $\frac{m+n}{m}$ puisque la probabilité de la sortie de cette boule est $\frac{m}{m+n}$.

Une première boule blanche étant sortie, la probabilité pour qu'il sorte une seconde boule blanche est $\frac{m-1}{m+n-1}$, et le nombre des tirages qui sont nécessaires pour obtenir cette seconde boule est en moyenne

$$\frac{m+n-1}{m-1}.$$

Lorsque la seconde boule blanche est sortie, la probabilité pour qu'une troisième sorte est

$$\frac{m-2}{m+n-2}$$

et la valeur moyenne correspondante pour le nombre des tirages est

$$\frac{m+n-2}{m-2}$$

et ainsi de suite.

Le nombre moyen des tirages à effectuer est donc

$$\frac{m+n}{m}+\frac{m+n-1}{m-1}+\frac{m+n-2}{m-2}+\ldots+\frac{n+1}{1}.$$

La suite des égalités écrites au n° 37 est l'expression, sous une forme différente, du raisonnement qui vient d'être employé.

39. Valeurs moyennes infinies. — Une valeur moyenne (ou une espérance mathématique) peut, dans certains cas, devenir infinie.

C'est ce qui se produit évidemment lorsqu'il y a une probabilité finie pour que la quantité considérée ait une valeur infinie.

Une valeur moyenne ou une espérance mathématique

$$p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_\mu x_\mu+\ldots$$

peut même être infinie quoique p_μ tende vers zéro avec μ si x_μ suit une loi telle que la série ci-dessus se prolonge indéfiniment et soit divergente.

40. Supposons, par exemple, que le joueur A possède seulement un franc et qu'il joue à pile ou face avec le joueur B infiniment riche à un franc par partie, jusqu'à ce qu'il ne possède plus rien.

Le joueur A a une chance sur deux de perdre son unique franc à la première partie, une chance sur huit de perdre finalement à la troisième partie, etc.; la probabilité pour que finalement il perde est un comme nous le verrons.

Imaginons un joueur H qui aurait promesse de recevoir un franc par partie jouée dans ce même jeu; son espérance qui est par définition la durée moyenne du jeu serait infinie (nos 159 et 184).

Nous avons donc ici un exemple d'espérance totale infinie.

Cette espérance est la valeur de la série

$$p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\ldots+p_\mu x_\mu+\ldots,$$

dont les termes sont relatifs aux probabilités de la perte finale à la

première, à la troisième, à la cinquième, ... partie (n° 140). Cette série peut s'écrire explicitement

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2^3} \times 3 + \ldots + \frac{\mu !}{\frac{\mu - 1}{2} ! \frac{\mu + 1}{2} !} \left(\frac{1}{2} \right)^{\mu} + \ldots$$

Ici tous les termes vont, à partir d'un certain rang, constamment en diminuant.

Dans l'exemple suivant, au contraire, tous les termes, en nombre infini, qui composent l'espérance mathématique totale sont égaux entre eux.

41. On jette une pièce de monnaie autant de fois qu'il est nécessaire pour qu'elle montre face. Le joueur A recevra 1^{fr} si c'est au premier coup que la pièce montre face, 2^{fr} si c'est au second coup, 4^{fr} si c'est au troisième, 2^{n-1} francs si c'est au $n^{\text{ième}}$ coup.

Quelle est l'espérance mathématique du joueur A?

L'espérance totale est la somme des espérances relatives à chacune des épreuves.

La probabilité pour que la pièce tombe pile au premier coup est $\frac{1}{2}$; l'espérance correspondante est $\frac{1}{2}$.

La probabilité pour que la pièce tombe pile au second coup est $\frac{1}{2^2}$, l'espérance correspondante est $\frac{1}{2^2} \times 2 = \frac{1}{2}$.

L'espérance relative à chaque partie est de même $\frac{1}{2}$, donc l'espérance totale

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

est infinie.

Cette sorte de jeu donna lieu autrefois à des commentaires sans fin : on le désigne sous le nom de *jeu de Saint-Pétersbourg*. Sa conclusion a été considérée longtemps comme paradoxale parce qu'elle paraît en contradiction avec le bon sens.

Le bon sens ne peut être invoqué lorsqu'il s'agit de questions délicates, il ne permet pas de reconnaître si l'aire comprise entre une

courbe et son asymptote est finie ou non, si une série est convergente ou divergente; les indices qu'il peut fournir n'ont souvent aucune valeur lorsqu'il s'agit de quantités qui peuvent croître indéfiniment comme dans le cas considéré.

Le joueur doit recevoir à chaque partie ce qu'il eût reçu à la partie précédente multiplié par deux; s'il devait recevoir la même somme multipliée par 1,999 son espérance serait finie; le bon sens ne fait cependant aucune différence entre les deux cas.

CHAPITRE II.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ÉPREUVES RÉPÉTÉES.

12. *La probabilité d'un événement est* p, *celle de l'événement contraire est* $q = 1 - p$; *on fait* μ *épreuves dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité pour que le premier événement se produise* n *fois, et le second* $\mu - n$ *fois?*

Cherchons d'abord la probabilité pour que les événements se succèdent dans un ordre déterminé. D'après le principe de la probabilité composée, la probabilité cherchée est

$$p^n q^{\mu-n}.$$

Elle est indépendante de l'ordre considéré. L'ordre étant indéterminé, la probabilité cherchée est, en vertu du principe de la probabilité totale, la somme d'autant de termes égaux à $p^n q^{\mu-n}$ qu'il y a d'unités dans le nombre des permutations avec répétition de n lettres A et de $\mu - n$ lettres B; ce nombre est

$$\frac{\mu!}{n!(\mu-n)!}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{\mu!}{n!(\mu-n)!} p^n q^{\mu-n}.$$

C'est l'un des termes du développement de $(p+q)^\mu$.

13. Si l'on écrit

$$(p+q)^\mu = p^\mu + \mu p^{\mu-1} q + \frac{\mu!}{2!(\mu-2)!} p^{\mu-2} q^2 + \ldots + q^\mu.$$

Le premier terme représente la probabilité pour que l'événement, dont la probabilité est q, ne se présente pas une seule fois; le deuxième représente la probabilité pour que cet événement arrive une fois; le troisième pour qu'il arrive deux fois, etc.

La somme des k premiers termes est la probabilité pour que cet événement arrive au plus $k-1$ fois sur μ épreuves.

La somme de tous les termes est la probabilité pour que l'événement se présente au plus μ fois; c'est la certitude, et la somme des termes est égale, en effet, à l'unité, puisque $p+q=1$.

44. **Probabilité maxima.** — *La probabilité d'un événement est p, celle de l'événement contraire est q; on fait μ épreuves dans les mêmes conditions. Quel est, pour chacun des événements, le nombre d'arrivées le plus probable?*

Le rapport d'un terme

$$\frac{\mu!}{n!\,(\mu+n)!}\,p^n q^{\mu-n}$$

au précédent

$$\frac{\mu!}{(n+1)!\,(\mu-n-1)!}\,p^{n+1} q^{\mu-n-1}$$

devra, pour le terme maximum, être plus grand que un, mais il devra devenir plus petit que l'unité si l'on remplace n par $n-1$.

La valeur de n qui correspond au maximum doit donc vérifier les inégalités

$$\frac{\mu-n+1}{n}\,\frac{p}{q}>1,$$

$$\frac{\mu-n}{n+1}\,\frac{p}{q}<1,$$

d'où l'on déduit

$$\mu p+p>n>\mu p-q.$$

Le nombre entier n, compris entre deux limites dont la différence $p+q$ est égale à l'unité, est donc déterminé, sauf dans le cas où $\mu p+p$ est entier; alors $\mu p-q$ est aussi entier. Deux termes consécutifs dans le développement de $(p+q)^\mu$ sont égaux entre eux. On peut dire, en négligeant la fraction, que μp est le nombre le plus probable d'arrivées pour l'événement dont la probabilité est p; le nombre d'arrivées le plus probable, pour l'événement dont la probabilité est q,

est

$$\mu - \mu p = \mu q.$$

La combinaison dont la probabilité est la plus grande est donc celle dans laquelle les événements se produisent en nombre proportionnel à leur probabilité.

45. La probabilité d'un événement est p, on fait μ épreuves identiques, quelle est la valeur moyenne du nombre des arrivées de cet événement?

Par définition (n° 16) cette valeur moyenne est

$$\mu p^{\mu} + (\mu - 1)\mu p^{\mu-1} q + (\mu - 2)\frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^{\mu-2} q^2 + \ldots$$
$$+ n \frac{\mu!}{n!(\mu-n)!} p^n q^{\mu-n} + \ldots + 1.\mu p q^{\mu-1} + 0 \times q^{\mu};$$

on peut l'écrire

$$\mu p \Big[p^{\mu-1} + (\mu-1) p^{\mu-2} q + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2} p^{\mu-3} q^2 + \ldots$$
$$+ \frac{(\mu-1)!}{(n-1)!(\mu-n)!} p^{n-1} q^{\mu-n} + \ldots + q^{\mu-1} \Big] = \mu p (p+q)^{\mu-1} = \mu p.$$

La valeur moyenne est donc μp.

La valeur μp du nombre d'arrivées de l'événement n'est pas seulement la valeur la plus probable, c'est aussi la valeur moyenne du nombre des arrivées de cet événement.

46. On peut arriver au même résultat sans faire aucun calcul et sans connaître l'expression des probabilités.

La probabilité de l'événement étant p, chaque nouvelle épreuve augmente la valeur moyenne de la quantité p. Cette valeur moyenne pour μ épreuves est donc μp.

47. **Cas d'épreuves dissemblables.** — Soient $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\mu$ les probabilités de l'arrivée d'un événement à la première, la deuxième, la troisième..., la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve.

Soient $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\mu$ les probabilités correspondantes pour que l'événement ne se produise pas, de sorte que $p_1 + q_1 = 1$, $p_2 + q_2 = 1$, ...

Quelle est la probabilité pour que l'événement se produise n fois en μ épreuves?

La probabilité pour que l'événement se produise aux n premières épreuves et ne se produise pas aux $\mu - n$ suivantes est, d'après le principe de la probabilité composée,

$$p_1 p_2 \dots p_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_\mu.$$

La probabilité demandée est, d'après le principe de la probabilité totale, la somme de toutes les expressions semblables obtenues en permutant les lettres, les indices restant fixes. Par exemple, la probabilité pour que, en trois épreuves, l'événement se produise deux fois est

$$p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3.$$

Dans le cas général, la probabilité est la somme de

$$\frac{\mu!}{n!(\mu - n)!}$$

termes.

La probabilité pour que l'événement se produise au moins n fois en μ épreuves est la somme des probabilités pour qu'il se produise n, $n + 1$, ..., μ fois.

La probabilité pour que l'événement ne se produise pas une seule fois est $q_1 q_2 \dots q_\mu$ et la probabilité pour qu'il se produise au moins une fois est $1 - q_1 q_2 \dots q_\mu$.

La valeur moyenne du nombre des arrivées de l'événement est $p_1 + p_2 + \dots + p_\mu$. En effet, si à une certaine épreuve, la probabilité de l'événement est p, la valeur moyenne se trouve augmentée par le fait de cette épreuve de la quantitée p. La valeur moyenne en μ épreuves est donc bien $p_1 + p_2 + \dots + p_\mu$.

On doit remarquer que la probabilité pour que l'événement se produise n fois est indépendante de l'ordre des épreuves.

48. **Cas de plusieurs alternatives.** — *Trois événements s'excluant mutuellement peuvent se produire : la probabilité du premier est p, celle du second est q, celle du troisième est r, de sorte que $p + q + r = 1$. On fait μ épreuves dans les mêmes conditions : quelle est la probabilité pour*

que le premier événement se produise n fois, le second m fois et le troisième $\mu - m - n$ fois?

En raisonnant comme au n° 12, on est conduit à la formule

$$\frac{\mu!}{n!\,m!\,(\mu-m-n)!}\,p^n q^m r^{\mu-m-n}.$$

49. Par un raisonnement analogue à celui du n° 14, on prouverait que, si l'on fait μ épreuves, la combinaison la plus probable est celle pour laquelle les événements se produisent en nombre proportionnel à leur probabilité: la combinaison pour laquelle $n=\mu p$, $m=\mu q$ $\mu-m-n=\mu r$.

La valeur moyenne du nombre d'événements de probabilité p en μ épreuves est μp, car le raisonnement qui a été employé dans le cas où deux événements sont seuls possibles ne suppose aucune hypothèse sur le fait de la possibilité d'un ou de plusieurs autres événements.

50. Si, à chaque épreuve, k événements s'excluant mutuellement peuvent se produire, leurs probabilités respectives étant $p_1, p_2, \ldots, p_k$; la probabilité pour que, en μ épreuves, le premier événement se produise n_1 fois, le second n_2 fois, ..., le $k^{\text{ième}}$, n_k fois est

$$\frac{\mu!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\,p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}.$$

La plus grande probabilité correspond au cas où les événements se produisent proportionnellement à leur probabilité.

La valeur moyenne du nombre des arrivées du premier événement est μp_1, celle qui est relative au second événement est μp_2, etc.

51. **Théorie générale du jeu.** — Cette théorie n'étudie aucun jeu en particulier; elle supposse le jeu entièrement connu pour une partie et elle étudie le sort des joueurs au bout d'un certain nombre de parties jouées dans des conditions identiques. Cette théorie se divise en trois problèmes de difficulté croissante; nous ne considérons dans ce chapitre que le plus élémentaire.

Dans le cas le plus général, on doit supposer qu'un joueur a, pour chaque partie, les probabilités p_1, p_2, p_3, ... de gagner les sommes

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, et les probabilités $q_1, q_2, q_3, \ldots$ de perdre les sommes β_1, β_2, β_3, ... Dans la plupart des cas, le joueur a deux alternatives seulement à chaque partie : il a la probabilité p de gagner la somme α et la probabilité $q = 1 - p$ de perdre la somme β, de sorte que son espérance mathématique est $\alpha p - \beta q$.

Trois cas particuliers sont spécialement simples et intéressants :

1° Le cas où le jeu est symétrique : le joueur considéré a pour probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner où de perdre à chaque partie une même somme que, pour fixer les idées, nous supposerons être 1 franc.

2° Le cas où les enjeux sont égaux : le joueur a probabilité p pour gagner 1 franc et probabilité q pour perdre 1 franc ;

3° Le cas où le jeu est équitable, c'est-à-dire où $\alpha p = \beta q$.

52. Premier problème de la théorie générale du jeu. — *On suppose deux joueurs* A *et* B *ayant à leur disposition une somme indéfinie, jouant un nombre déterminé de parties et réglant les différences à la fin du jeu.*

Soient, à chaque partie, p la probabilité pour que le joueur A gagne et $q = 1 - p$ la probabilité pour qu'il perde.

Nous étudierons d'abord le cas où l'enjeu est 1 franc par partie et nous chercherons la probabilité $\varpi_{\mu,m}$ pour que le joueur A perde m francs en μ parties.

Soient x le nombre des parties gagnées, $\mu - x$ le nombre des parties perdues ; on doit avoir

$$(\mu - x) - x = m$$

d'où

$$x = \frac{\mu - m}{2}.$$

Si le joueur a perdu m francs en μ parties, il a donc gagné $\frac{\mu - m}{2}$ parties et perdu $\frac{\mu + m}{2}$ parties ; la probabilité d'une telle éventualité est (n° 42)

$$\varpi_{\mu,m} = \frac{\mu!}{\frac{\mu - m}{2}!\,\frac{\mu + m}{2}!}\,p^{\frac{\mu - m}{2}}\,q^{\frac{\mu + m}{2}}.$$

La probabilité pour que la perte soit égale ou supérieure à m francs, en μ parties, est

$$\sum_{m=m}^{m=\mu} \varpi_{\mu,m},$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs de m différant de deux unités : m, $m+2$, $m+4$, ...

Le probabilité totale de perte du joueur est

$$\sum_{m=2}^{m=\mu} \varpi_{\mu,m} \quad \text{ou} \quad \sum_{m=1}^{m=\mu} \varpi_{\mu,m},$$

suivant que μ est pair ou impair.

53. Supposons maintenant que le joueur ait, à chaque partie, probabilité p de gagner α francs et probabilité q de perdre β francs; cherchons la probabilité pour que la perte soit m en μ parties.

Le nombre des parties gagnées doit être $\frac{\alpha\mu + m}{\alpha+\beta}$ et le nombre des parties perdues doit être $\frac{\beta\mu - m}{\alpha+\beta}$. La probabilité du gain étant p, la probabilité pour que cet événement se produise $\frac{\beta\mu - m}{\alpha+\beta}$ fois en μ épreuves est

$$\varpi_{\mu,m} = \frac{\mu!}{\frac{\beta\mu - m}{\alpha+\beta}!\,\frac{\alpha\mu + m}{\alpha+\beta}!}\, p^{\frac{\beta\mu - m}{\alpha+\beta}}\, q^{\frac{\alpha\mu + m}{\alpha+\beta}}.$$

La quantité donnée m doit évidemment être telle que $\frac{\beta\mu - m}{\alpha+\beta}$ soit entier.

La probabilité pour que le joueur perde plus de m francs est

$$\sum_{m=m}^{m=\beta\mu} \varpi_{\mu,m};$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs m, $m+\alpha+\beta$, $m+2\alpha+2\beta$, ..., toutes les pertes correspondant à μ parties différant entre elles de la quantité $\alpha+\beta$.

La probabilité totale de perte est

$$\sum_{m=m_1}^{m=\beta\mu} \varpi_{\mu,m}.$$

m_1 étant la plus petite valeur qui rende $\frac{\beta\mu - m}{\alpha + \beta}$ entier.

54. Le joueur A, pour chaque partie, a la probabilité p de gagner 1 franc, la probabilité q de perdre 1 franc, et la probabilité $r = 1 - p - q$ de faire partie nulle. Quelle est la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, il ait perdu m francs?

La probabilité pour que, en μ parties, il y ait x gains, y pertes, $\mu - x - y$ parties nulles est (n° 48)

$$\frac{\mu!}{y!\,(\mu - x - y)!\,x!}\,q^y\,r^{\mu-x-y}\,p^x.$$

Soit m la perte du joueur A en μ parties: cette perte, différence entre le nombre des parties perdues et celui des parties gagnées, peut être obtenue en donnant à y et à x les valeurs suivantes :

Parties perdues.	Parties nulles.	Parties gagnées.
m	$\mu - m$	0
$m + 1$	$\mu - m - 2$	1
.....	....	.
$m + \frac{\mu - m}{2}$	0	$\frac{\mu - m}{2}$

La probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est donc

$$\varpi_{\mu,m} = \sum_{x=0}^{x=\frac{\mu-m}{2}} \frac{\mu!}{(m+x)!\,(\mu - m - 2x)!\,x!}\,q^{m+x}\,r^{\mu-m-2x}\,p^x.$$

Si $\mu - m$ est impair, le dernier terme de la formule est celui pour lequel $x = \frac{\mu - m - 1}{2}$.

On voit que le problème est beaucoup plus compliqué que dans le cas où deux alternatives sont seules possibles.

Si le nombre des alternatives à chaque partie était très grand, le problème deviendrait d'une complication excessive par suite de la difficulté d'analyse de tous les cas possibles.

Il est cependant évident qu'il doit exister, lorsque μ est grand, une loi générale qui soit la même pour tous les problèmes de même nature. La théorie des probabilités continues détermine cette loi.

CHAPITRE III.

QUESTIONS DIVERSES.

55. **Étude d'une martingale.** — Un joueur risque en une seule partie la somme β qu'il veut consacrer au jeu; s'il perd la première partie il se retire du jeu; si, au contraire, il gagne cette partie, il en joue une seconde en ajoutant à la première mise la somme qu'il a gagnée. Il continue de même jusqu'à ce qu'il perde, ou jusqu'à ce qu'il gagne n parties,

Soient α le bénéfice éventuel du joueur à la première partie, p la probabilité de le réaliser; nous allons calculer les espérances de gain et de perte.

La probabilité pour gagner étant p, la probabilité pour gagner n parties de suite est p^n; multipliant cette probabilité par le bénéfice éventuel correspondant, nous obtiendrons l'espérance positive du joueur. Or, d'après l'énoncé du problème, le joueur possédera la somme $\alpha+\beta$ après la première partie, la somme $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\beta}$ après la seconde, $\frac{(\alpha+\beta)^3}{\beta^2}$ après la troisième et $\frac{(\alpha+\beta)^n}{\beta^{n-1}}$ après la $n^{\text{ième}}$.

Après cette $n^{\text{ième}}$ partie, il possède donc la somme

$$\frac{(\alpha+\beta)^n}{\beta^{n-1}},$$

son gain est donc

$$\frac{(\alpha+\beta)^n}{\beta^{n-1}}-\beta,$$

et son espérance positive a pour valeur

$$p^n\left\{\frac{(\alpha+\beta)^n}{\beta^{n-1}}-\beta\right\},$$

son espérance négative est

$$-(1-p^n)\beta,$$

par suite son *espérance totale* a pour valeur

$$p^n \left\{ \frac{(\alpha+\beta)^n}{\beta^{n-1}} - \beta \right\} - (1-p^n)\beta;$$

elle se réduit bien à zéro quand le jeu est équitable, c'est-à-dire lorsque

$$\alpha p = \beta(1-p).$$

La combinaison dite *martingale* ne peut donc rendre un jeu avantageux ou désavantageux, si, à chaque partie, le jeu est équitable.

56. Au contraire, si le jeu est avantageux, cette combinaison augmente son avantage, elle l'augmente même plus que toute autre (à égalité du nombre des parties jouées) puisqu'elle permet de jouer le plus gros jeu possible.

Supposons que le joueur risque seulement 1 franc au jeu et qu'il doive jouer au maximum trois parties avec la probabilité de gain $\frac{6}{10}$. S'il joue la martingale, son espérance positive est 1,512, son espérance négative 0,784 et son espérance totale 0,728.

Si le joueur ne risque que 1 franc par partie, son espérance positive est 0,936, son espérance négative 0,496 et son espérance totale 0,44.

Le jeu de la martingale est donc beaucoup plus avantageux, son avantage croîtrait d'ailleurs très vite, si l'on considérait un plus grand nombre de parties.

Supposons encore, pour simplifier, que $\alpha = \beta = 1$, la probabilité de gagner en jouant n parties est p^n et le bénéfice correspondant est $2^n - 1$.

Si n croît indéfiniment, la probabilité p^n tend vers zéro quel que soit p et le gain $2^n - 1$ tend vers l'infini.

L'espérance totale devient infinie, nulle ou égale à -1, suivant que p est supérieur, égal ou inférieur à $\frac{1}{2}$.

57. **Problème des partis.** — *A chaque partie, il y a probabilité* p *pour que le joueur* A *gagne et probabilité* $q = 1 - p$ *pour que le joueur* B *gagne.*

Le jeu prend fin quand le joueur A a gagné m parties ou quand le joueur B en a gagné n. Quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par le gain du joueur A?

(μ doit évidemment être compris entre m et $m+n-1$.)

Pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par le gain du joueur A, il faut que ce joueur gagne la dernière partie et $m-1$ autres parmi les $\mu-1$ précédentes.

La probabilité pour que, sur $\mu-1$ épreuves, un événement de probabilité p se produise $m-1$ fois est (nº 12)

$$\frac{(\mu-1)!}{(m-1)!\,(\mu-m)!}\,p^{m-1}q^{\mu-m}.$$

Il faut multiplier cette probabilité par p puisque la $\mu^{\text{ième}}$ partie doit produire un gain, la probabilité demandée est donc

$$\frac{(\mu-1)!}{(m-1)!\,(\mu-m)!}\,p^{m}q^{\mu-m}.$$

La probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par le gain du joueur B est de même

$$\frac{(\mu-1)!}{(n-1)!\,(\mu-n)!}\,p^{\mu-n}q^{n}.$$

La probabilité pour que le jeu se termine à une partie indiquée est la somme des probabilités relatives à chaque joueur pour cette partie.

La durée moyenne du jeu, ou valeur moyenne du nombre des parties, est

$$\sum_{\mu=m}^{\mu=m+n-1}\frac{\mu!}{(m-1)!\,(\mu-m)!}\,p^{m}q^{\mu-m}+\sum_{\mu=n}^{\mu=m+n-1}\frac{\mu!}{(n-1)!\,(\mu-n)!}\,p^{\mu-n}q^{n}.$$

58. *Quelle est la probabilité totale relative à chaque joueur?*

La probabilité totale de réussite du joueur A est

$$\mathrm{P}=\sum_{\mu=m}^{\mu=m+n-1}\frac{(\mu-1)!}{(m-1)!\,(\mu-m)!}\,p^{m}q^{\mu-m}$$

ou

$$P = p^m \left[1 + mq + \frac{m(m+1)}{1.2} q^2 + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)} q^{n-1} \right].$$

La probabilité totale de réussite du joueur B est de même

$$Q = q^n \left[1 + np + \frac{n(n+1)}{1.2} p^2 + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)} p^{m-1} \right].$$

La recherche des probabilités totales P et Q constitue le problème des partis.

Si le gagnant doit toucher la somme α, le parti du joueur A, c'est-à-dire son espérance mathématique, est $P\alpha$; le parti du joueur B est $Q\alpha$.

59. On peut obtenir les valeurs des probabilités P et Q sous une autre forme :

Désignons par s la quantité $m + n - 1$ qui exprime la plus longue durée possible du jeu, nous allons supposer que le jeu se continue jusqu'à la $s^{\text{ième}}$ partie et, parmi tous les cas possibles, nous considérerons ceux qui sont favorables au joueur A.

Soit le développement

$$(p+q)^s = p^s + \frac{s}{1} p^{s-1} q + \frac{s(s-1)}{1.2} p^{s-2} q^2 + \ldots.$$

Le premier terme exprime la probabilité pour que le joueur A gagne les s parties, le second terme exprime la probabilité pour qu'il gagne $s - 1$ parties, le joueur B gagnant une partie, etc. Pour que le joueur A gagne finalement, il faut qu'il ait gagné au moins m parties, la probabilité de sa réussite est donc la somme des $s - m + 1$ premiers termes du développement; on a donc

$$P = p^s + sp^{s-1} q + \frac{s(s-1)}{1.2} p^{s-2} q^2 + \ldots + \frac{s!}{m!\,(n-1)!} p^m q^{n-1}$$

et de même

$$Q = q^s + sq^{s-1} p + \frac{s(s-1)}{1.2} q^{s-2} p^2 + \ldots + \frac{s!}{n!\,(m-1)!} q^n p^{m-1}.$$

On peut énoncer le problème qui précède sous une forme qui paraît plus générale :

La probabilité d'un événement étant p et celle de l'événement contraire étant $q = 1 - p$, quelle est la probabilité pour que le premier événement se produise m fois avant que le second se produise n fois? Cette probabilité a été désignée par P.

60. Lorsqu'il y a plusieurs joueurs, les problèmes analogues à ceux que nous venons d'étudier se traitent par les mêmes méthodes.

Considérons le cas de trois joueurs A, B, C ayant à chaque partie les probabilités p, q, r pour gagner. (On suppose qu'il y a, à chaque partie, un gagnant et un seul, de sorte que $p + q + r = 1$.) Le jeu prend fin quand le joueur A a gagné m parties, ou quand le joueur B a gagné n parties, ou quand le joueur C a gagné k parties.

Quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par le gain du joueur A?

(μ doit évidemment être compris entre m et $m + n + k - 2$.)

Le joueur A doit gagner la dernière partie, il doit de plus avoir gagné $m - 1$ parties parmi les $\mu - 1$ qui ont été jouées avant la dernière.

Supposons que, parmi ces $\mu - 1$ parties, le joueur B en ait gagné ν; alors le joueur C en aura gagné $\mu - \nu - m$.

La probabilité pour que, en $\mu - 1$ parties, le joueur A ait gagné $m - 1$ parties et le joueur B, ν parties est (n° 18)

$$\frac{(\mu - 1)!}{(m - 1)!\,\nu!\,(\mu - \nu - m)!}\, p^{m-1} q^{\nu} r^{\mu-\nu-m}.$$

La probabilité pour que le joueur A gagne finalement en μ parties, le joueur B ayant gagné ν parties, s'obtiendra en multipliant cette expression par p, puisque le joueur A gagne la $\mu^{\text{ième}}$ partie. Cette probabilité est donc

$$p\, \frac{(\mu - 1)!}{(m - 1)!\,\nu!\,(\mu - \nu - m)!}\, p^{m-1} q^{\nu} r^{\mu-\nu-m}.$$

La probabilité demandée est la somme de toutes les quantités analogues pour toutes les valeurs possibles de ν.

Par hypothèse, le joueur A gagne finalement, donc le nombre des parties gagnées par B est inférieur à n et le nombre des parties gagnées

par C est inférieur à k, on doit donc avoir

$$\nu < n,$$
$$\mu - \nu - m < k.$$

La sommation dont il est question doit donc s'étendre à toutes les valeurs de ν qui vérifient ces inégalités.

La discussion des différents cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs de μ, m, n, k n'offre aucune difficulté, il est inutile de nous y arrêter.

Lorsque l'on connaît la probabilité de réussite d'un joueur pour les différentes parties, la somme de ces probabilités est la probabilité totale de réussite du joueur.

Cette probabilité totale peut aussi se déterminer par un raisonnement analogue à celui du n° 59.

61. *A chaque partie, il y a probabilité p pour que le joueur A gagne, probabilité q pour que le joueur B gagne et probabilité $r = 1 - p - q$ pour que ces joueurs fassent partie nulle et soient considérés comme n'ayant gagné ni l'un ni l'autre. Le jeu prend fin quand le joueur A a gagné m parties ou quand le joueur B en a gagné n.*

Quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par le gain du joueur A?

Cherchons d'abord la probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par le gain final du joueur A, le joueur B ayant gagné x parties.

Le joueur A, par hypothèse, gagne la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la probabilité de cette éventualité est p.

Relativement aux $\mu - 1$ premières parties : il y a $m - 1$ parties gagnées par le joueur A, x parties gagnées par le joueur B et $\mu - m - x$ parties nulles. La probabilité de cette éventualité est (n° 48)

$$\frac{(\mu - 1)!}{(m - 1)!\, x!\, (\mu - m - x)!}\, p^{m-1} q^{x} r^{\mu-m-x}.$$

La probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par le gain final du joueur A, le joueur B ayant gagné x parties, s'obtient en multipliant cette expression par p puisque à la $\mu^{\text{ième}}$ partie le joueur A

gagne; cette probabilité est donc

$$\frac{(\mu-1)!}{(m-1)!\,x!\,(\mu-m-x)!}\,p^m q^x r^{\mu-m-x}.$$

La probabilité demandée s'obtiendra en sommant les expressions analogues pour les valeurs convenables de x, c'est-à-dire de zéro à $n-1$ si $n-1$ est inférieur à $\mu-m$ et de zéro à $\mu-m$ si cette quantité est inférieure à $n-1$.

Si aucune limite n'est assignée pour la durée du jeu, la probabilité totale de réussite du joueur A s'obtient en additionnant les probabilités relatives aux diverses valeurs de μ, depuis m jusqu'à l'infini.

Ce dernier problème peut encore s'énoncer sous la forme suivante qui paraît plus générale : A chaque épreuve, il y a probabilité p pour qu'un premier événement se produise, probabilité q pour qu'un second événement se produise et probabilité $r = 1 - p - q$ pour que ces événements ne se produisent ni l'un ni l'autre; quelle est la probabilité pour que le premier événement se réalise m fois avant que le second se réalise n fois?

62. *Les joueurs* A *et* B *jouent alternativement;* A *joue la première, la troisième, la cinquième, ... partie.* B *joue la deuxième, la quatrième, ... partie.* A, *quand il joue, a probabilité p pour gagner la partie et probabilité q pour la perdre.* B *a probabilité p' pour gagner et q' pour perdre. Le jeu prend fin quand* A *a gagné m parties ou quand* B *en a gagné n. Quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la* $(2\mu+1)^{\text{ième}}$ *partie par le gain du joueur* A?

La question nous impose trois conditions :

1° Le joueur A doit gagner la $(2\mu+1)^{\text{ième}}$ partie, la probabilité de cet événement est p.

2° Le joueur A doit gagner $m-1$ parties parmi les μ premières qu'il a jouées. La probabilité de cette éventualité est (n° 42)

$$\frac{\mu!}{(m-1)!\,(\mu-m+1)!}\,p^{m-1} q^{\mu-m+1}.$$

3° Le joueur B ne doit pas gagner plus de $n-1$ parties parmi les

μ parties qu'il doit jouer. La probabilité de cette éventualité est (n° 43)

$$q^{\mu} + \frac{\mu}{1} q^{(\mu-1)} p + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} q^{(\mu-2)} p^2 + \dots$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n-2)}{1.2.3\dots(n-1)} q^{(\mu-n-1)} p^{n-1},$$

elle se réduit à l'unité quand $n - 1$ est supérieur à μ.

La probabilité demandée est, d'après le principe des probabilités composées, égale au produit des trois probabilités précédentes.

Si aucune limite n'est assignée pour la durée du jeu, la probabilité totale de réussite du joueur A est égale à la somme des probabilités que nous venons de calculer pour $\mu = m - 1$, $\mu = m$, $\mu = m + 1$, ..., $\mu = \infty$.

Un problème intéressant consisterait à calculer les probabilités en supposant que les joueurs jouent alternativement, mais que chacun d'eux joue plusieurs parties de suite jusqu'à ce qu'il perde. Le jeu dont il s'agit serait, en effet, jusqu'à un certain point, assimilable au jeu de billard. Ce dernier jeu considéré (sous bien des réserves) comme un jeu de hasard serait caractérisé par ce fait que le même joueur continue à jouer jusqu'à ce qu'il manque un coup.

Le problème dont il est question semble, quelle que soit la méthode employée, devoir conduire à des calculs impraticables.

Il est facile de résoudre le problème des partis dans le cas où le jeu est à parties liées : Les joueurs A et B jouant comme précédemment (n° 57), le premier qui a gagné, par exemple, cinq parties marque un point. Si le joueur A a, par exemple, gagné deux parties et le joueur B, trois parties, quelle est la probabilité pour que le premier marque m points avant que le second en marque n?

Nous ne croyons pas utile d'exposer la solution de ce problème, elle ne présente pas de difficulté.

63. **Loteries.** — *Dans une urne, il y a n boules numérotées de un à n; on en tire μ, quelle est la probabilité pour que parmi elles il y ait k boules désignées d'avance.*

Le nombre total des cas possibles est celui des combinaisons de n objets μ à μ, soit C_n^{μ}.

Le nombre des cas favorables est celui des combinaisons où entrent les k boules désignées et $\mu - k$ boules parmi les $n - k$ qui ne sont pas désignées; ce nombre est donc $C_{\substack{\mu-k\\ n-k}}$.

La probabilité cherchée a pour valeur

$$\frac{C_{\substack{\mu-k\\ n-k}}}{C_{\substack{\mu\\ n}}} = \frac{\mu!\,(n-k)!}{n!\,(\mu-k)!}.$$

L'expression de la probabilité peut encore s'écrire

$$\frac{\mu}{n}\,\frac{\mu-1}{n-1}\,\frac{\mu-2}{n-2}\cdots\frac{\mu-k+1}{n-k+1}.$$

L'application du principe des probabilités composées conduirait à cette dernière formule.

64. En divisant les expressions précédentes par $1.2.3\ldots k = k!$ on aura la probabilité pour que les k numéros sortent dans un ordre donné entre eux, car on ne considérera alors qu'une seule des permutations des k numéros donnés au lieu de les considérer toutes.

65. On peut aussi chercher la probabilité pour que chacun des k numéros sorte à un rang qui lui sera indiqué.

Le nombre des cas possibles est celui des arrangements de n objets μ à μ

$$A_{\substack{\mu\\ n}} = n(n-1)\ldots(n-\mu+1).$$

Le nombre des cas favorables est celui des arrangements où chacun des k numeros désignés est à son rang, les $\mu - k$ autres numéros de l'arrangement étant formés d'une façon quelconque par les $n - k$ numéros non désignés.

Le nombre des cas favorables est donc

$$A_{\substack{\mu-k\\ n-k}} = (n-k)(n-k-1)\ldots(n-\mu+1),$$

et, par suite, la probabilité a pour valeur

$$\frac{A_{\substack{\mu-k\\ n-k}}}{A_{\substack{\mu\\ n}}} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

En multipliant cette expression par $k!$ on aura la probabilité pour que les k numéros sortent à des rangs indiqués d'avance, à chaque rang correspondant l'un quelconque des k numéros et non plus un numéro indiqué.

66. Par exemple, la probabilité pour que les k numéros indiqués soient les k premiers du tirage est

$$\frac{(n-k)!\,k!}{n!};$$

on aurait obtenu également cette expression en observant que le problème actuel revient à supposer que $\mu = k$ dans le premier problème que nous avons traité.

67. *Parmi les n numéros d'une loterie il y a μ gagnants. On possède h billets; quelle est la probabilité de gagner k lots?*

Le nombre des cas possibles est celui des combinaisons de n objets μ à μ, soit C_n^μ.

Une combinaison favorable se compose de k billets faisant partie de h billets que nous possédons et de $\mu - k$ autres billets parmi les $n-k$ billets que nous ne possédons pas, le nombre des combinaisons favorables est donc $C_h^k C_{n-h}^{\mu-k}$ et la probabilité a pour valeur

$$\frac{C_h^k C_{n-h}^{\mu-k}}{C_n^\mu}.$$

La probabilité pour gagner au moins k lots est la somme des probabilités pour gagner k lots, $k+1$ lots, etc. On l'obtient donc en additionnant les valeurs fournies par la formule précédente et relatives à k, $k+1$, etc.

68. Pour nous placer dans les conditions ordinaires des loteries, supposons que les lots soient de a_1 francs, a_2 francs, ..., a_μ francs respectivement, et supposons qu'un joueur A achète pour 1 franc un des billets de la loterie, c'est-à-dire un des n numéros.

Le joueur A a probabilité $\frac{1}{n}$ de gagner le premier lot a_1 et son béné-

fice est alors $(a_1 - 1)$ francs. Il y a de même probabilité $\frac{1}{n}$ de gagner $(a_2 - 1)$ francs, ...; son espérance positive est donc

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu - \mu).$$

La probabilité pour que le joueur ne gagne aucun lot est la probabilité pour qu'il ne gagne ni au premier tirage, ni au second, ...; c'est donc la quantité

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n-1}\,\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-\mu}{n-\mu+1} = \frac{n-\mu}{n}.$$

Le joueur perdant alors 1 franc, cette même quantité exprime son espérance négative; son espérance totale est donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu - \mu) - \frac{n-\mu}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu - n}{n}.$$

On obtient ce même résultat un peu plus simplement en considérant le jeu de A comme composé de deux opérations : Le joueur A verse d'abord 1 franc et à cette première opération correspond l'espérance mathématique -1. Il acquiert de ce fait la possibilité de gagner au tirage et l'espérance mathématique de cette seconde opération est $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu)$, l'espérance totale est donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu) - 1.$$

Si le joueur achète h billets, son espérance totale est $h\mathcal{E}$.

69. Problèmes relatifs aux tirages dans une urne. — *Une urne contient m boules blanches et n boules noires ; quelle est la probabilité pour que, sur μ boules extraites de l'urne, il y ait k boules blanches.*

(On suppose que les boules extraites ne sont pas remplacées dans l'urne.)

Cherchons d'abord la probabilité pour que les μ boules extraites dont k doivent être blanches et $\mu - k$ noires se succèdent dans un ordre déterminé, les k boules blanches sortant, par exemple, aux k premiers tirages.

D'après le principe de la probabilité composée, la probabilité cherchée est

$$\left[\frac{m}{m+n}\,\frac{m-1}{m+n-1}\cdots\frac{m-k+1}{m+n-k+1}\right]\times\left[\frac{n}{m+n-k}\,\frac{n-1}{m+n-k-1}\cdots\frac{n-\mu+k+1}{m+n-\mu+1}\right].$$

En effet, la probabilité pour qu'une boule blanche sorte au premier tirage est $\frac{m}{m+n}$, la probabilité pour qu'une boule blanche sorte au second tirage, quand une boule blanche est sortie au premier, est $\frac{m-1}{m+n-1}$, etc.

La probabilité ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{m!\,n!\,(m+n-\mu)!}{(m-k)!\,(n-\mu+k)!\,(m+n)!};$$

elle est, comme on le voit, indépendante de l'ordre considéré. La probabilité pour que k boules blanches et $\mu-k$ boules noires se succèdent dans un ordre déterminé est donc exprimée par cette formule.

La probabilité pour que k boules blanches soient extraites en μ tirages est, en vertu du principe de la probabilité totale, la somme d'autant de termes égaux à l'expression précédente qu'il y a d'unités dans le nombre des permutations avec répétition de k lettres A et de $\mu-k$ lettres B; ce nombre est

$$\frac{\mu!}{k!\,(\mu-k)!}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{\mu!\,m!\,n!\,(m+n-\mu)!}{k!\,(\mu-k)!\,(m-k)!\,(n-\mu+k)!\,(m+n)!}.$$

70. Si l'on extrait μ boules de l'urne, quel est le nombre k de boules blanches auquel correspond la plus grande probabilité?

Il suffit, pour le déterminer, d'écrire que l'expression précédente est plus grande qu'elle ne le serait si l'on y remplaçait k par $k+1$ ou par $k-1$; on obtient finalement

$$\frac{\mu m+\mu+m+1}{m+n+2}>k>\frac{\mu m-\mu-n-1}{m+n+2}.$$

Le nombre entier k, compris entre deux quantités qui diffèrent d'une unité, est ainsi déterminé.

Si m, n et μ sont de grands nombres, on a approximativement

$$k = \mu \frac{m}{m+n}.$$

71. Un problème analogue à celui que nous venons de traiter est relatif au cas où μ boules sont extraites successivement, chaque boule étant remise dans l'urne après chaque tirage. La recherche de la probabilité pour extraire k boules blanches constitue un cas particulier du problème des épreuves répétées qui a déjà été étudié.

Les deux problèmes se confondent si m et n sont très grands par rapport à μ. Ainsi la plus grande probabilité dans le cas des épreuves répétées a lieu pour

$$k = \frac{\mu m}{m+n}.$$

72. Si l'on fait μ tirages, le nombre des boules blanches qui sortent est, en moyenne,

$$\frac{\mu m}{m+n},$$

si la boule extraite est remise dans l'urne après chaque tirage (n° 45).

Si les boules extraites ne sont pas remises dans l'urne, le nombre moyen des boules blanches qui sortent en μ tirages est toujours

$$\frac{\mu m}{m+n}.$$

Ce nombre est, en effet, d'après la définition des valeurs moyennes,

$$\sum \frac{k.\mu!\, m!\, n!\, (m+n-\mu)!}{k!\, (\mu-k)!\, (m-k)!\, (n-\mu+k)!\, (m+n)!}$$

et l'on peut l'écrire

$$\frac{\mu m}{m+n} \sum \frac{(\mu-1)!\, (m-1)!\, n!\, (m+n-\mu)!}{(k-1)!\, (\mu-k)!\, (m-k)!\, (n-\mu+k)!\, (m+n-1)!}.$$

Le Σ représente la somme des probabilités pour qu'on tire 0, 1, 2, 3, ..., $(\mu-1)$ boules blanches en $\mu-1$ tirages d'une urne qui contient

$m-1$ boules blanches et n boules noires, somme de probabilités qui évidemment a pour valeur un. Donc la valeur moyenne du nombre des boules blanches extraites est

$$\frac{\mu m}{m+n}.$$

73. On peut arriver au même résultat par une autre méthode : Soit u_x la valeur moyenne du nombre des boules blanches qui sortent en x tirages, on a

$$u_{x+1} = p(u_x+1) + (1-p)u_x,$$

p désignant la probabilité pour que, au $(x+1)^{\text{ième}}$ tirage il sorte une boule blanche. En effet : ou à ce tirage il sort une boule blanche, et la valeur moyenne devient u_x+1 ; ou il sort une boule noire, et la valeur moyenne conserve la valeur u_x.

Nous allons calculer la valeur de p. En x tirages, u_x boules blanches et $x-u_x$ boules noires ont été extraites, il reste donc dans l'urne $m+n-x$ boules dont $m-u_x$ blanches et la probabilité de tirer une boule blanche au $(x+1)^{\text{ième}}$ tirage est

$$p = \frac{m-u_x}{m+n-x}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, elle devient

$$(m+n-x)u_{x+1} = (m+n-x-1)u_x + m;$$

on en déduit successivement

$$u_1 = \frac{m}{m+n}, \qquad u_2 = \frac{2m}{m+n}, \qquad \ldots, \qquad u_x = \frac{xm}{m+n}.$$

74. *Une urne contient m boules blanches, n boules noires et u boules rouges ; quelle est la probabilité pour que, sur μ boules extraites de l'urne il y ait k boules blanches et h boules noires ?*

(On suppose que les boules extraites ne sont pas replacées dans l'urne.)

Cherchons d'abord la probabilité pour que les μ boules extraites, dont k doivent être blanches, h noires et $\mu-h-k$ rouges, se succèdent dans un ordre déterminé, les k boules blanches sortant par

exemple aux k premiers tirages, les h boules noires aux h tirages suivants et les boules rouges ensuite.

D'après le principe de la probabilité composée, la probabilité cherchée est

$$\left[\frac{m}{m+n+u}\,\frac{m-1}{m+n+u-1}\cdots\frac{m-k+1}{m+n+u-k+1}\right]$$
$$\times\left[\frac{n}{m+n+u-k}\,\frac{n-1}{m+n+u-k-1}\cdots\frac{n-h+1}{m+n+u-k-h+1}\right]$$
$$\times\left[\frac{u}{m+n+u-k-h}\,\frac{u-1}{m+n+u-k-h-1}\cdots\frac{u-(\mu-k-h)+1}{m+n+u-\mu+1}\right],$$

cette probabilité peut s'écrire

$$\frac{m!}{(m-k)!}\,\frac{n!}{(n-h)!}\,\frac{u!}{(u-[\mu-k-h])!}\,\frac{(m+n+u-\mu)!}{(m+n+u)!},$$

elle est indépendante de l'ordre considéré. La probabilité pour que les k boules blanches, les h boules noires et les $\mu-k-h$ boules rouges se succèdent dans un ordre déterminé est donc exprimée par cette formule.

La probabilité pour que les k boules blanches et h boules noires soient extraites en μ tirages est, en vertu du principe de la probabilité totale, la somme d'autant de termes égaux à l'expression précédente qu'il y a d'unités dans le nombre des permutations avec répétion de k lettres A, h lettres B et $\mu-k-h$ lettres C; ce nombre est

$$\frac{\mu!}{k!\,h!\,(\mu-k-h)!}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{m!}{(m-k)!}\,\frac{n!}{(n-h)!}\,\frac{u!}{(u-[\mu-k-h])!}\,\frac{(m+n+u-\mu)!}{(m+n+u)!}\,\frac{\mu!}{k!\,h!\,(\mu-k-h)!}.$$

75. Si l'urne contenait m boules blanches, n boules noires, u boules rouges, v boules vertes, ..., la probabilité pour que, en μ tirages, il sorte k boules blanches, h boules noires, l boules rouges, λ boules vertes, ... serait

$$\frac{m!}{(m-k)!}\,\frac{n!}{(n-h)!}\,\frac{u!}{(u-l)!}\,\frac{v!}{(v-\lambda)!}\cdots,$$
$$\times\frac{(m+n+u+v+\ldots-\mu)!}{(m+n+u+v+\ldots)!}\,\frac{\mu!}{k!\,h!\,l!\,\lambda!\ldots}.$$

76. Si une urne contient s boules dont m blanches, la valeur moyenne des boules blanches qu'on extrait en μ tirages est $\frac{m\mu}{s}$, car le raisonnement employé précédemment pour déterminer cette valeur moyenne (n° 73) ne suppose en aucune façon que les $s - m$ autres boules soient d'une même couleur.

77. Une urne A contient m boules blanches et n boules noires, on en tire μ au hasard et on les place sans regarder leur couleur dans une seconde urne B. La probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne B est évidemment $\frac{m}{m+n}$, comme si la boule était directement extraite de l'urne A. La probabilité d'extraire une boule blanche des $m + n - \mu$ boules qui restent dans l'urne A est aussi $\frac{m}{m+n}$.

L'urne A_1 contient m_1 boules blanches et n_1 boules noires, l'urne A_2 contient m_2 boules blanches et n_2 boules noires, ... l'urne A_i renferme m_i boules blanches et n_i boules noires. On tire au hasard μ_1 boules de l'urne A_1, μ_2 boules de l'urne A_2, ... μ_i boules de l'urne A_i et on place ces boules sans regarder leur couleur dans une même urne K. On extrait une boule de cette dernière urne, quelle est la probabilité pour qu'elle soit blanche?

Il y a probabilité $\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i}$ pour que la boule que l'on va extraire provienne de l'urne A_1 et, dans ce cas, la probabilité pour que la boule soit blanche est $\frac{m_1}{m_1 + n_1}$.

Il y a de même probabilité $\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i}$ pour que la boule que l'on va extraire provienne de l'urne A_2 et, dans ce cas, la probabilité pour que la boule soit blanche est $\frac{m_2}{m_2 + n_2}, \ldots$

La probabilité cherchée est donc, en vertu des principes des probabilités composées et totales,

$$\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i} \frac{m_1}{m_1 + n_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i} \frac{m_2}{m_2 + n_2} + \ldots + \frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i} \frac{m_i}{m_i + n_i}.$$

78. *Une urne contient m boules blanches et n boules noires ; on les tire*

une à une jusqu'à ce que toutes les boules d'une même couleur quelconque soient sorties. Quelle est la probabilité pour que les boules qui restent dans l'urne soient noires?

Le nombre des cas possibles est celui de la permutation de $m+n$ boules, dont m sont blanches et n sont noires. Considérons la boule de rang x dans toutes ces permutations; le nombre des permutations où la boule de rang x est noire est au nombre des permutations où la boule de rang x est blanche comme n est à m; en particulier, le nombre des permutations telles que la dernière boule soit noire est au nombre des permutations telles que la dernière boule soit blanche comme n est à m.

La probabilité p pour que la dernière boule soit noire est à la probabilité $1-p$ pour que la dernière boule soit blanche comme n est à m. On a donc

$$\frac{p}{1-p} = \frac{m}{n},$$

d'où

$$p = \frac{n}{m+n}.$$

La probabilité $1-p$ pour que la dernière boule soit blanche est de même

$$\frac{m}{m+n}.$$

79. Le même raisonnement montre que, s'il y a dans l'urne m boules blanches, n boules noires et t boules rouges, la probabilité pour que la dernière boule soit noire est

$$\frac{n}{m+n+t},$$

et, plus généralement, ce raisonnement s'appliquerait quel que soit le nombre des couleurs.

On peut encore dire, ce qui revient au même : le nombre des cas possibles est celui des permutations de $m+n+t$ boules, dont m blanches, n noires et t rouges, c'est-à-dire

$$\frac{(m+n+t)!}{m!\,n!\,t!};$$

faisons abstraction de la dernière boule qui doit être noire, le nombre des cas possibles est celui des permutations de $m+n+t-1$ boules, dont m blanches, $n-1$ noires et t rouges, c'est-à-dire

$$\frac{(m+n+t-1)!}{m!\,(n-1)!\,t!}.$$

La probabilité pour que la dernière boule soit noire est donc

$$\frac{n}{m+n+t}.$$

La théorie des équations aux différences finies conduirait au même résultat, mais non sans quelque difficulté.

80. *Une urne contient m boules blanches et n boules noires; en les extrayant une à une, quelle est la valeur moyenne du nombre des tirages qui seront nécessaires pour que toutes les boules d'une même couleur quelconque soient sorties ?*

Si l'on désigne par $u_{x,y}$ cette valeur moyenne, quand il y a encore dans l'urne x boules blanches et y boules noires, on a

$$u_{x,y} = 1 + \frac{x}{x+y}\,u_{x-1,y} + \frac{y}{x+y}\,u_{x,y-1};$$

en effet, la valeur moyenne comprendra le prochain tirage, puis deux cas pourront se produire : ou la boule qui sortira sera blanche et la valeur cherchée deviendra $u_{x-1,y}$, ou elle sera noire et la valeur moyenne deviendra $u_{x,y-1}$.

La première éventualité ayant pour probabilité $\frac{x}{x+y}$ et la seconde $\frac{y}{x+y}$, l'équation n'est qu'une conséquence des principes des probabilités composées et totales.

La fonction $u_{x,y}$ doit aussi satisfaire aux conditions $u_{0,y}=0$, $u_{x,0}=0$.

En prenant pour inconnue la fonction $Z_{x,y}$ définie par la relation

$$u_{x,y} + Z_{x,y} = x + y,$$

l'équation prend la forme plus simple,

$$(x+y)Z_{x,y} = xZ_{x-1,y} + yZ_{x,y-1};$$

les conditions aux limites sont alors

$$Z_{0,y} = y, \qquad Z_{x,0} = x.$$

Si l'on pose $y = 1$ dans l'équation, elle devient

$$(x+1)Z_{x,1} = xZ_{x-1,1} + x.$$

En donnant à x les valeurs successives $1, 2, \ldots x$, on obtient

$$\begin{aligned}
2Z_{1,1} &= 1Z_{0,1} + 1,\\
3Z_{2,1} &= 2Z_{1,1} + 2,\\
4Z_{3,1} &= 3Z_{2,1} + 3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(x+1)Z_{x,1} &= xZ_{x-1,1} + x,
\end{aligned}$$

et, en additionnant toutes ces égalités,

$$(x+1)Z_{x,1} = 1 + (1+x)\frac{x}{2},$$

d'où

$$Z_{x,1} = \frac{x^2+x+2}{2(x+1)}.$$

Posant maintenant $y = 2$ dans l'équation générale, elle devient

$$(x+2)Z_{x,2} = xZ_{x-1,2} + 2Z_{x,1}$$

ou, en remplaçant $Z_{x,1}$ par sa valeur

$$(x+1)(x+2)Z_{x,2} = x(x+1)Z_{x-1,2} + x^2 + x + 2,$$

posant ensuite successivement $x = 1$, $x = 2$, ..., $x = x$, on obtient

$$\begin{aligned}
2.3Z_{1,2} &= 1.2Z_{0,2} + 1 + 1 + 2,\\
3.4Z_{2,2} &= 2.3Z_{1,2} + 4 + 2 + 2,\\
4.5Z_{3,2} &= 3.4Z_{2,2} + 9 + 3 + 2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(x+1)(x+2)Z_{x,2} &= x(x+1)Z_{x-1,2} + x^2 + x + 2,
\end{aligned}$$

et en additionnant

$$(x+1)(x+2)Z_{x,2} = 4 + \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} + \frac{x(x+1)}{2} + 2x;$$

on a donc

$$z_{x,2} = \frac{x^2 + x + 6}{3(x+1)},$$

et plus généralement

$$z_{x,y} = \frac{x^2 + x + y + y^2}{(x+1)(y+1)}.$$

On en déduit

$$u_{x,y} = \frac{xy(x+y+2)}{(x+1)(y+1)}.$$

La valeur moyenne cherchée est donc

$$u_{m,n} = \frac{mn(m+n+2)}{(m+1)(n+1)}.$$

81. Nous venons de calculer la valeur moyenne du nombre des tirages qu'il faudra effectuer pour que toutes les boules d'une même couleur quelconque soient sorties; il est intéressant de chercher la part qui revient dans cette valeur moyenne à la sortie en premier des boules blanches.

Désignons par $V_{x,y}$ la valeur moyenne absolue du nombre des tirages qu'il faudra effectuer pour que toutes les boules blanches sortent, quand x boules blanches et y boules noires sont encore dans l'urne. La fonction V doit satisfaire à l'équation aux différences partielles

$$V_{x,y} = \frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+y} V_{x-1,y} + \frac{y}{x+y} V_{x,y-1}.$$

En effet, le premier tirage aura nécessairement lieu et celui-ci, d'après un problème précédemment traité (nº 78), a probabilité $\frac{y}{x+y}$ pour compter dans la valeur moyenne dont il s'agit. Ensuite deux cas seront à distinguer comme pour la moyenne totale $u_{x,y}$. On devra également avoir $V_{0,y} = 0$ et $V_{x,0} = 0$.

L'équation précédente a pour solution

$$V_{x,y} = \frac{xy}{x+1},$$

la valeur moyenne cherchée est donc

$$V_{m,n} = \frac{mn}{m+1}.$$

La même moyenne correspondant à la sortie des boules noires serait

$$\frac{mn}{n+1}.$$

La somme de ces deux moyennes est

$$\frac{mn(m+n+2)}{(m+1)(n+1)} = u_{m,n},$$

ce qui devait être.

82. Pour obtenir la valeur moyenne relative quand les boules blanches sortent toutes d'abord, il suffit de diviser $V_{m,n}$ par la probabilité $\frac{n}{m+n}$ qu'ont les boules blanches de sortir les premières (n° 78) : on obtient ainsi

$$\frac{mn}{m+1}\,\frac{m+n}{n} = \frac{m(m+n)}{m+1}.$$

Donc, la valeur moyenne du nombre des tirages, quand les boules blanches sortent les premières, est

$$\frac{m(m+n)}{m+1},$$

et la valeur moyenne, quand les boules noires sortent les premières, est

$$\frac{n(m+n)}{n+1}.$$

Ces deux valeurs sont très voisines l'une de l'autre et très voisines de $m+n$, quel que soit le rapport de m à n.

83. *Une urne contient m boules blanches et n boules noires; on les extrait une à une jusqu'à ce que l'urne soit vide. m étant plus grand que n, quelle est la probabilité pour que, pendant toute la durée du tirage, on ait toujours extrait plus de boules blanches que de boules noires?*

Nous chercherons d'abord la probabilité pour que, à un tirage quelconque, on ait extrait autant de boules noires que de boules blanches.

Le nombre de tous les cas possibles est celui des permutations de

$m+n$ lettres, dont m sont égales entre elles et n égales entre elles,

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

Une quelconque de ces permutations peut se représenter par la suite

$$M_1 M_2 N_3 \ldots.$$

M_1 indique que la première boule extraite est blanche, M_2 exprime que la seconde boule est blanche, N_3 que la troisième boule est noire, etc.

Le nombre des cas favorables comprendra d'abord le nombre de toutes les permutations commençant par N_1, soit

$$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

et le nombre des permutations commençant par M_1 et telles qu'à un tirage quelconque γ le nombre des N soit égal à celui des M.

Considérons une de ces permutations

$$M_1 M_2 M_3 N_4 M_5 M_6 N_7 \ldots N_\gamma M_{\gamma+1} N_{\gamma+2} \ldots$$

et formons la permutation en quelque sorte symétrique pour les γ premières lettres et identique pour les lettres suivantes

$$N_1 N_2 N_3 M_4 N_5 N_6 M_7 \ldots M_\gamma M_{\gamma+1} N_{\gamma+2} \ldots,$$

à chacune des permutations de la première forme correspond une permutation de la seconde.

Réciproquement, à toute permutation commençant par N_1 correspond une permutation de la première forme pour laquelle, à un certain rang, le nombre des N est égal à celui des M.

En effet, en appelant successivement les lettres d'une permutation commençant par N_1, il arrivera un moment où le nombre des M égalera le nombre des N, puisque m est supérieur à n. Dans la permutation symétrique le nombre des N sera alors égal au nombre des M. Ainsi, à chaque permutation commençant par N_1 correspond une permutation favorable commençant par M_1 et le nombre total des permu-

tations favorables est

$$2\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}.$$

La probabilité pour que, à un tirage quelconque, le nombre des boules noires extraites soit égal au nombre des boules blanches est donc

$$2\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}\frac{m!n!}{(m+n)!}=\frac{2n}{m+n},$$

et la probabilité pour que le nombre des boules blanches extraites soit constamment supérieur au nombre des boules noires est

$$1-\frac{2n}{m+n}=\frac{m-n}{m+n}.$$

84. *Une urne contient m boules blanches et n boules noires; on les extrait une à une jusqu'à ce que l'urne soit vide, m étant plus grand que n, quelle est la probabilité pour que, pendant toute la durée du tirage, on ait toujours extrait plus de boules blanches que de boules noires et pour que de plus la différence entre le nombre des boules blanches et celui des boules noires ait été constamment inférieure à un nombre donné k?*

Le nombre des cas possibles est, comme pour le problème précédent,

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Le nombre des cas favorables est celui des permutations

$$M_1M_2M_3N_4M_5N_6\ldots$$

telles que, en lisant les lettres de gauche à droite, le nombre des lettres M soit durant toute la lecture supérieur à celui des lettres N, mais d'une quantité plus petite que k.

Pour trouver le nombre de ces permutations, nous aurons recours à la solution d'un problème très important de la théorie générale du jeu (n° 190).

Le joueur A possède x francs, et le joueur B possède y francs, ils jouent 1 franc par partie, et, après chaque partie, le perdant verse 1 franc au gagnant.

La probabilité pour que le joueur A ait perdu ses x francs exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour expression

$$H = H_x - H_{(x+y)+y} + H_{2(x+y)+x} - H_{3(x+y)+y} + H_{4(x+y)+x} - \ldots,$$

les quantités H ayant pour valeur

$$H_z = \frac{z}{\mu} \frac{\mu!}{\frac{\mu - z}{2}!\,\frac{\mu + z}{2}!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}.$$

Nous allons évaluer autrement cette probabilité.

Pour chaque partie, il y a deux alternatives, le joueur A peut gagner ou perdre : donc, le nombre total des cas possibles en μ parties est 2^{μ}.

Si le joueur A a perdu x francs en μ parties, c'est qu'il a gagné $\frac{\mu - x}{2}$ parties et perdu $\frac{\mu + x}{2}$ parties. On peut représenter ses alternatives de gains et de pertes par la suite

$$G_1 G_2 P_3 \ldots P_{\mu}.$$

G_1 indique que la première partie a donné un gain ; G_2 représente un gain pour la seconde partie, P_3 une perte pour la troisième, etc.

Pour qu'une permutation soit favorable, il faut que : 1° elle se compose de $\frac{\mu - x}{2}$ lettres G et de $\frac{\mu + x}{2}$ lettres P ; 2° il faut que, en la lisant de gauche à droite, le nombre des lettres G ne dépasse pas le nombre des lettres P de la quantité y, car si la différence dépassait ce chiffre, le jeu s'arrêterait, le joueur B ayant perdu les y francs qu'il consacrait au jeu.

En lisant la permutation dans le même sens, il faut pour la même raison que le nombre des lettres P ne soit jamais supérieur au nombre des lettres G de la quantité x, sauf pour la dernière lettre.

Si maintenant on lit les lettres en commençant par la fin, c'est-à-dire de droite à gauche, une permutation sera favorable si, durant toute la lecture, le nombre des lettres P est constamment supérieur au nombre des lettres G mais ne le dépasse pas de la quantité $x + y$.

Désignons par H le nombre des permutations de μ lettres, dont $\frac{\mu - x}{2}$

lettres G et $\frac{\mu+x}{2}$ lettres P, ces permutations étant telles que, en les lisant dans un sens déterminé : 1° le nombre des lettres P soit pendant toute la lecture supérieur au nombre des lettres G ; 2° l'excès du nombre des lettres P sur le nombre des lettres G soit constamment inférieur à une quantité donnée $x+y$.

La probabilité pour que le joueur A perde ses x francs exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est alors

$$\frac{H}{2^\mu}.$$

Cette probabilité a aussi pour valeur Π, on a donc

$$H = 2^\mu \Pi.$$

85. Reprenons la question qui nous est posée ; la probabilité est le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, elle a donc pour valeur

$$\frac{H\, m!\, n!}{(m+n)!} = \frac{m!\, n!}{(m+n)!}\, 2^\mu \Pi.$$

Dans l'expression de Π, on devra remplacer $x+y$ par k, $\frac{\mu-x}{2}$ par n, $\frac{\mu+x}{2}$ par m et μ par $m+n$. La probabilité cherchée a pour valeur

$$\frac{m!\,n!}{m+n}\left[\frac{m-n}{m!\,n!} - \frac{2k-(m-n)}{(m-k)!\,(n+k)!} + \frac{2k+(m-n)}{(n-k)!\,(m+k)!} \right.$$
$$\left. - \frac{4k-(m-n)}{(m-2k)!\,(n+2k)!} + \frac{4k+(m-n)}{(n-2k)!\,(m+2k)!} - \ldots\right].$$

L'expression d'un terme est égale à celle de l'antéprécédent dans laquelle on augmente le coefficient de k d'une unité dans le dénominateur et de deux unités dans le numérateur.

Si, par exemple, $m=6$, $n=3$, $k=4$, la formule donne pour probabilité

$$8\,\frac{3!\,6!}{9!}.$$

Il y a donc huit permutations favorables, résultat qu'on obtient directement sans difficulté.

86. *Une urne contient m boules blanches et n boules noires; on les extrait une à une jusqu'à ce que l'urne soit vide, m étant plus grand que n, quelle est la probabilité pour que, pendant toute la durée du tirage, le nombre des boules noires extraites ne dépasse pas de la quantité α le nombre des boules blanches?*

Le nombre des cas possibles est, comme pour le problème précédent,

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

Le nombre des cas favorables est celui des permutations

$$M_1 M_2 N_3 M_4 N_5 \ldots$$

telles que, en lisant les lettres de gauche à droite, le nombre des lettres N ne dépasse jamais le nombre des lettres M de la quantité α.

Pour trouver le nombre de ces permutations, nous aurons recours à la solution d'un problème de la théorie générale du jeu (n° 142).

Le joueur A possède z francs et le joueur B une fortune infinie, ils jouent 1 franc par partie et après chaque partie le perdant verse 1 franc au gagnant.

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme $z-y$ est (n° 142)

$$\left[\frac{\mu!}{\left(\frac{\mu-z+y}{2}\right)!\left(\frac{\mu+z-y}{2}\right)!}-\frac{\mu!}{\left(\frac{\mu-z-y}{2}\right)!\left(\frac{\mu+z+y}{2}\right)!}\right]\frac{1}{2^\mu}.$$

Nous allons évaluer autrement cette probabilité : Puisqu'il doit être joué μ parties, le nombre des cas possibles est 2^μ. Si le joueur A a perdu $z-y$ francs en μ parties, c'est qu'il a gagné $\frac{\mu-z+y}{2}$ parties et perdu $\frac{\mu+z-y}{2}$ parties. On peut représenter ses alternatives de gains et de pertes par la suite

$$G_1 G_2 P_3 G_4 \ldots.$$

G_1 indique que la première partie a donné un gain; G_2 représente un gain pour la seconde partie; P_3 une perte pour la troisième, etc.

Pour qu'une permutation soit favorable il faut que : 1° elle se com-

pose de $\frac{\mu-z+y}{2}$ lettres G et de $\frac{\mu+z-y}{2}$ lettres P; 2° il faut que, en la lisant de gauche à droite, le nombre des lettres P ne dépasse pas le nombre des lettres G de la quantités z, car autrement le jeu s'arrèterait, le joueur A ayant perdu tout ce qu'il possède.

Si maintenant on lit les lettres en commençant par la fin, c'est-à-dire de droite à gauche, une permutation sera favorable si, durant toute la lecture, le nombre des lettres G ne dépasse pas le nombre des lettres P de la quantité y.

Désignons par K le nombre des permutations de μ lettres, dont $\frac{\mu-z+y}{2}$ lettres G et $\frac{\mu+z-y}{2}$ lettres P, ces permutations étant telles que, en les lisant dans un sens déterminé, le nombre des lettres G ne dépasse jamais le nombre des lettres P de la quantité y.

La probabilité pour que le joueur A perde la somme $z-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a été obtenue ci-dessus, mais elle a aussi pour expression $\frac{K}{2^\mu}$, et de l'égalité de ces deux valeurs on déduit

$$K = \frac{\mu!}{\frac{\mu-z+y}{2}!\,\frac{\mu+z-y}{2}!} - \frac{\mu!}{\frac{\mu-z-y}{2}!\,\frac{\mu+z+y}{2}!}.$$

Le nombre des permutations de m lettres M et n lettres N telles que, en les lisant dans un sens déterminé, le nombre des lettres N ne dépasse jamais, pendant la durée de la lecture, le nombre des lettres M de la quantité α, s'obtient en remplaçant dans la dernière formule $\frac{\mu-z+y}{2}$ par n, $\frac{\mu+z-y}{2}$ par m et y par α; ce nombre est donc

$$\frac{(m-n)!}{m!\,n!} - \frac{(m+n)!}{(m+\alpha)!\,(n-\alpha)!}$$

et la probabilité pour que, pendant toute la durée du tirage, le nombre des boules noires n'ait jamais dépassé le nombre des boules blanches de la quantité α est

$$1 - \frac{m!\,n!}{(m+\alpha)!\,(n-\alpha)!}.$$

87. La méthode ne s'applique pas lorsque $\alpha = 0$. Lorsque $\alpha = 1$, la

probabilité est

$$\frac{m+1-n}{m+1}.$$

Reprenons le cas où $\alpha = 0$, c'est-à-dire le cas où l'on demande la probabilité pour que le nombre des boules noires extraites soit toujours inférieur au nombre des boules blanches. La première boule doit être blanche, la probabilité de cette éventualité est $\frac{m}{m+n}$. Il reste alors $m-1$ boules blanches dans l'urne, et la probabilité pour que le nombre des boules noires ne dépasse jamais d'une unité le nombre des boules blanches s'obtient en remplaçant dans la formule relative au cas où $\alpha = 1$, la quantité m par $m-1$. La probabilité pour que le nombre des boules noires extraites soit toujours inférieur au nombre des boules blanches est donc

$$\frac{m}{m+n}\,\frac{m-n}{m} = \frac{m-n}{m+n}.$$

C'est le résultat que nous avons déjà obtenu (n° 83).

La méthode que nous avons employée dans le cas général permet de résoudre le problème suivant :

Une urne contient m boules blanches et n boules noires, on les extrait une à une, jusqu'à ce que l'urne soit vide. m étant plus grand que n, quelle est la probabilité pour que, pendant toute la durée du tirage, le nombre des boules blanches extraites ne dépasse pas le nombre des boules noires de la quantité $m-n+\beta$?

Cette probabilité a pour valeur

$$1 - \frac{m!\,n!}{(m-\beta)!\,(n+\beta)!}.$$

On pourrait résoudre ce même problème en supposant de plus que le nombre des boules noires extraites ne doive jamais dépasser de la quantité α le nombre des boules blanches. Il faudrait se baser sur le résultat du n° 197.

88. *Une urne contient m boules blanches et n boules noires, on les extrait une à une sans remettre dans l'urne les boules sorties. Quelle est la probabilité pour extraire x boules blanches avant y boules noires?*

1° On peut extraire les x blanches les unes après les autres, la probabilité de cette éventualité est

$$\frac{m}{m+n}\,\frac{m-1}{m+n-1}\cdots\frac{m-x+1}{m+n-x+1};$$

2° On peut extraire x blanches et une noire, si l'ón donne le rang que doit occuper la boule noire, la probabilité est

$$\frac{m}{m+n}\,\frac{m+1}{m+n-1}\cdots\frac{m-x+1}{m+n-x+1}\,\frac{n}{m+n-x};$$

la boule noire peut occuper les x premiers rangs, la probabilité est donc, si le rang est arbitraire,

$$\left[\frac{m}{m+n}\,\frac{m-1}{m+n-1}\cdots\frac{m-x+1}{m+n-x+1}\right]\frac{x}{1}\,\frac{n}{m+n-x};$$

3° On peut extraire x blanches et deux noires, si l'on fixe les rangs des deux boules noires, la probabilité est

$$\frac{m}{m+n}\,\frac{m-1}{m+n-1}\cdots\frac{m-x+1}{m+n-x+1}\,\frac{n}{m+n-x}\,\frac{n-1}{m+n-x-1},$$

et si les rangs sont arbitraires la probabilité a pour valeur

$$\left[\frac{m}{m+n}\,\frac{m-1}{m+n-1}\cdots\frac{m-x+1}{m+n-x+1}\right]\frac{x(x+1)}{1.2}\,\frac{n}{m+n-x}\,\frac{n-1}{m+n-x-1}.$$

La probabilité demandée est, d'après le principe de la probabilité totale, la somme des expressions ci-dessus et de leurs analogues, c'est-à-dire

$$\frac{m!\,(m+n-x)!}{(m+x)!\,(m+n)!}\left[1+\frac{x}{1}\,\frac{n}{m+n-x}\right.$$
$$+\frac{x(x+1)}{1.2}\,\frac{n(n-1)}{(m+n-x)(m+n-x-1)}$$
$$\left.+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n-x)(m+n-x-1)(m+n-x-2)}+\ldots\right].$$

La somme se compose de y termes.

Si l'on demandait la probabilité pour que x boules blanches soient extraites avant y boules noires en μ tirages au maximum ($\mu < x+y$),

on ne devrait prendre dans la somme précédente que $\mu - x + 1$ termes.

89. Si m et n sont infinis, la probabilité p pour obtenir une boule blanche est constante à chaque tirage, de même que la probabilité q pour obtenir une boule noire. On a

$$p = \frac{m}{m+n}, \qquad q = \frac{n}{m+n}$$

et l'expression de la probabilité pour obtenir x boules blanches avant y boules noires devient

$$p^x \left[1 + \frac{x}{1} q + \frac{x(x+1)}{1.2} q^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} q^3 + \ldots \right].$$

On aurait encore obtenu ce résultat en remarquant que, dans l'hypothèse où m et n sont infinis, le problème proposé n'est autre que celui des partis (n° 58).

90. m et n étant finis, si l'on pose $x = m$ et $y = n$, on obtient la probabilité pour que la totalité des boules blanches soit extraite avant la totalité des boules noires. Cette probabilité est

$$\frac{m!\,n!}{(m+n)!} \left[1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \right],$$

formule numériquement équivalente à celle du n° 78.

91. *Les conditions étant les mêmes que pour les problèmes précédents, quelle est la valeur moyenne du nombre des tirages qu'il faut effectuer pour obtenir k boules blanches?*

Désignant par $u_{z.x.y}$ la valeur moyenne quand z boules blanches doivent encore sortir pour compléter les k boules demandées et quand il y a dans l'urne x boules blanches et y boules noires, on a

$$u_{z,x,y} = 1 + \frac{x}{x+y} u_{z-1,x-1,y} + \frac{y}{x+y} u_{z.x,y-1},$$

équation qui est une conséquence des principes des probabilités composées et totales. On a de plus

$$u_{0,x,y} = 0, \qquad u_{z,x,0} = z.$$

x est évidemment supérieur à z.

Pour intégrer cette équation, on opère comme précédemment (n° 80), en posant $z = 1$, elle devient

(1) $$(x+y)\,u_{1,x,y} = (x+y) + y\,u_{1,x,y-1},$$

posant d'abord $y = 1$, puis $y = 2$, etc., on aperçoit bientôt la formule

$$u_{1,x,y} = \frac{x+y+1}{x+1}.$$

L'équation générale devient alors, en y posant $z = 2$ et en remplaçant $u_{1,x,y-1}$ par sa valeur,

(2) $$(x+y)\,u_{2,x,y} = 2(x+y) + y\,u_{2,x,y-1};$$

comparant cette équation avec (1) on en déduit

$$u_{2,x,y} = 2\,u_{1,x,y}$$

et plus généralement

$$u_{z,x,y} = \frac{z(x+y+1)}{x+1},$$

la valeur moyenne cherchée est donc

$$\frac{k(m+n+1)}{m+1}.$$

92. *Une urne contient m boules blanches et n boules noires, on les extrait une à une jusqu'à ce qu'il reste dans l'urne autant de boules noires que de boules blanches. Quelle est la probabilité pour que μ tirages soient nécessaires?*

Supposons que m soit plus grand que n, il est évident que l'égalité entre le nombre des boules blanches et noires ne pourra se produire avant le $(m-n)^{\text{ième}}$ tirage et qu'elle peut ensuite avoir lieu pour le $(m-n+2)^{\text{ième}}$ tirage, pour le $(m-n+4)^{\text{ième}}$ tirage, etc. La quantité donnée μ doit donc différer de $m-n$ par un nombre pair. La valeur

maxima que peut prendre μ est $m+n$ qui correspond à la sortie de toutes les boules.

Si l'égalité entre le nombre des boules blanches et noires se produit au $\mu^{\text{ième}}$ tirage, c'est que, dans les μ premiers tirages, il est sorti $\frac{\mu+m-n}{2}$ boules blanches et $\frac{\mu-m+n}{2}$ boules noires.

La probabilité pour que, en μ tirages, il sorte $\frac{\mu+m-n}{2}$ boules blanches et $\frac{\mu-m+n}{2}$ boules noires a pour expression (n° 69)

$$\frac{\mu!\, m!\, n!\, (m+n-\mu)!}{\frac{\mu+m-n}{2}!\ \frac{\mu+n-m}{2}!\ \frac{m+n-\mu}{2}!\ \frac{m+n-\mu}{2}!\ (m+n)!}.$$

Cette probabilité n'est pas celle que nous cherchons, elle exprime la probabilité pour qu'il y ait égalité du nombre des boules au $\mu^{\text{ième}}$ tirage, alors que nous devons déterminer la probabilité pour que l'égalité ait lieu pour la première fois au $\mu^{\text{ième}}$ tirage.

La succession des sorties des boules aux μ premiers tirages, si l'égalité a lieu au $\mu^{\text{ième}}$ tout en ayant pu avoir lieu avant, peut se représenter par la suite

$$B_1 L_2 B_3 B_4 L_5 \ldots B_\mu,$$

B_1 indique qu'au premier tirage il est sorti une boule blanche; L_2 indique qu'au second tirage, il est sorti une noire, etc. Il y a $\frac{\mu+m-n}{2}$ lettres B et $\frac{\mu+n-m}{2}$ lettres L.

Dire que l'égalité entre le nombre des boules blanches et noires s'est produite pour la première fois au $\mu^{\text{ième}}$ tirage revient à dire que, en lisant la suite précédente de droite à gauche, le nombre des lettres B a été, pendant toute la lecture, supérieur au nombre des lettres L.

Nous savons (n° 83) que le nombre des suites qui satisfont à cette condition est égal au nombre total des suites multiplié par

$$\frac{m-n}{\mu}.$$

La probabilité pour que l'égalité ait lieu pour la première fois au $\mu^{\text{ième}}$ tirage est donc égale au produit de la probabilité pour qu'elle ait lieu

d'une façon quelconque au $\mu^{\text{ième}}$ tirage par la quantité

$$\frac{m-n}{\mu}.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{m-n}{\mu}\,\frac{\mu!\,m!\,n!\,(m+n-\mu)!}{\frac{\mu+m-n}{2}!\,\frac{\mu+n-m}{2}!\,\frac{m+n-\mu}{2}!\,\frac{m+n-\mu}{2}!\,(m+n)!}$$

La valeur moyenne du nombre des tirages qu'il faut effectuer pour obtenir l'égalité du nombre des boules blanches et noires dans l'urne est

$$\frac{m!\,n!\,(m-n)}{(m+n)!}\sum_{\mu=m-n}^{\mu=m-n}\frac{\mu!\,(m+n-\mu)!}{\frac{\mu+m-n}{2}!\,\frac{\mu+n-m}{2}!\,\frac{m+n-\mu}{2}!\,\frac{m-n-\mu}{2}!}.$$

Le Σ s'étend aux valeurs $m-n$, $m-n+2$, $m-n+4$, ..., $m+n$ de μ.

93. *Une urne contient n boules marquées* 1, 2, ..., n; *on les tire une à une en remettant après chaque tirage la boule sortie; quelle est la probabilité pour que h numéros désignés sortent au moins une fois en* μ *tirages?*

Le nombre des cas possibles est celui des arrangements avec répétition de n objets μ à μ, soit n^μ.

Le nombre des arrangements qui contiennent un numéro désigné est

$$n^\mu-(n-1)^\mu,$$

il est égal, en effet, au nombre total des arrangements, diminué du nombre des arrangements qui ne contiennent pas le numéro désigné, c'est-à-dire diminué de $(n-1)^\mu$.

Le nombre des arrangements qui contiennent deux numéros désignés s'obtiendra en retranchant de la valeur de la formule précédente le nombre des arrangements qui contiennent le premier numéro et qui ne contiennent pas le second; ce nombre s'obtient en remplaçant dans la formule précédente n par $n-1$: il est

$$(n-1)^\mu-(n-2)^\mu.$$

Le nombre total des arrangements qui contiennent trois numéros désignés s'obtiendra en retranchant de la valeur de cette formule le nombre des arrangements qui contiennent les deux premiers numéros mais non le troisième. Ce nombre s'obtient en remplaçant dans la dernière formule n par $n-1$, il est

$$(n-1)^\mu + 2(n-2)^\mu + (n-3)^\mu.$$

Le nombre des arrangements qui contiennent trois numéros désignés est donc

$$n^\mu - 3(n-1)^\mu + 3(n-2)^\mu - (n-3)^\mu.$$

Plus généralement, le nombre des arrangements qui contiennent h numéros désignés est

$$n^\mu - h(n-1)^\mu + \frac{h(h-1)}{1.2}(n-2)^\mu - \ldots \pm (n-h)^\mu.$$

La probabilité demandée s'obtient en divisant cette quantité par n^μ, elle a pour valeur

$$1 - h\left(1-\frac{1}{n}\right)^\mu + \frac{h(h-1)}{1.2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^\mu - \ldots \pm \left(1-\frac{h}{n}\right)^\mu.$$

En particulier, si $h=n$, on obtient la probabilité pour que tous les numéros sortent en μ tirages

$$1 - n\left(1-\frac{1}{n}\right)^\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^\mu - \ldots.$$

94. Si μ et n sont grands, on a approximativement

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^\mu = e^{-\frac{\mu}{n}},$$

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^\mu = e^{-\frac{2\mu}{n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^\mu = e^{-\frac{k\mu}{n}},$$

et par suite, la probabilité pour que h numéros sortent en μ tirages peut s'écrire

$$1 - h e^{-\frac{\mu}{n}} + \frac{h(h-1)}{1.2} e^{-\frac{2\mu}{n}} - \ldots.$$

les exponentielles décroissant très rapidement, on pourra généralement se borner aux premiers termes.

La probabilité pour que les n numéros sortent en μ tirages a pour valeur approchée

$$\left(1 - e^{-\frac{\mu}{n}}\right)^n.$$

95. *Une urne contient n boules marquées* 1, 2, 3, ..., n ; *on les tire une à une en remettant après chaque tirage la boule sortie ; quelle est la valeur moyenne du nombre des tirages qu'il faudra effectuer pour que toutes les boules soient sorties ?*

Soit u_x le nombre moyen des tirages qui seront à effectuer lorsque x numéros ne seront pas encore sortis, on peut écrire

$$u_x = 1 + \frac{x}{n} u_{x-1} + \frac{n-x}{n} u_x.$$

En effet, le nombre moyen des tirages se composera d'abord du tirage prochain, puis deux cas seront possibles : ou la boule extraite sera une des x boules non encore sorties et le nombre moyen deviendra u_{x-1}, ou elle sera une des boules déjà sorties et le nombre moyen conservera la valeur u_x.

La première éventualité ayant pour probabilité $\frac{x}{n}$ et la seconde pour probabilité $\frac{n-x}{n}$, l'équation ci-dessus est l'expression des principes des probabilités composées et totales.

On peut écrire cette équation

$$u_x - u_{x-1} = \frac{n}{x},$$

on en déduit

$$u_n - u_{n-1} = \frac{n}{n},$$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = \frac{n}{n-1},$$

$$u_{n-2} - u_{n-3} = \frac{n}{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_1 - u_0 = \frac{n}{1}.$$

En additionnant ces égalités et en remarquant que $u_0 = 0$, on obtient la valeur moyenne cherchée

$$u_n = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + 1\right)$$

ou

$$u_n = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

96. La valeur moyenne peut être obtenue par une autre méthode : La probabilité pour que les n boules soient extraites en μ tirages est (n° 93)

$$1 - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mu} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\mu} - \ldots.$$

La probabilité pour que les n boules soient extraites en $\mu - 1$ tirages est

$$1 - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mu-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\mu-1} - \ldots.$$

La différence de ces quantités est la probabilité pour que les n boules soient extraites exactement en μ tirages, de telle façon qu'au $\mu^{\text{ième}}$ tirage sorte la dernière boule.

Cette probabilité est

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mu-1} - (n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\mu-1} + \ldots.$$

La valeur moyenne du nombre des tirages sera alors, d'après la définition connue,

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} \mu\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mu-1} - (n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\mu-1} + \ldots\right]$$

ou

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} \mu\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mu-1} - (n-1)\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} \mu\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\mu-1} + \ldots.$$

Chacun des Σ est de la forme

$$\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-1}\left[n + (n+1)\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) + (n+2)\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2 + \ldots\right]$$

ou

$$\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-1} \frac{\alpha n^2 + n^2 - \alpha n}{\alpha^2}.$$

L'expression de la valeur moyenne contient $n - 1$ termes.

97. On peut encore obtenir la valeur moyenne par un raisonnement très simple, en se rappelant que, si la probabilité d'un événement est p (nº 22), le nombre moyen des épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement se produise est $\frac{1}{p}$.

Au premier tirage sort un numéro, la valeur moyenne correspondant à la sortie d'un premier numéro est donc $1 = \frac{n}{n}$. Ensuite la probabilité pour qu'il sorte un numéro différent est

$$\frac{n-1}{n};$$

la valeur moyenne, correspondant à la sortie d'un second numéro, est donc

$$\frac{n}{n-1};$$

un second numéro étant sorti, la probabilité pour qu'un troisième sorte est

$$\frac{n-2}{n};$$

et la valeur moyenne correspondante est

$$\frac{n}{n-2}.$$

Un troisième numéro étant sorti, le nombre moyen des tirages à effectuer pour qu'un quatrième numéro sorte est de même

$$\frac{n}{n-3},$$

et ainsi de suite, la valeur moyenne cherchée est donc

$$\frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-3} + \ldots + \frac{n}{1},$$

ou, comme précédemment,

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

98. **Jeu de la rencontre.** — *Une urne contient n boules numérotées de un à n; on les tire successivement jusqu'à ce que l'urne soit vide. Il y a rencontre si au $k^{ième}$ tirage la boule tirée porte le numéro k. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas une seule rencontre?*

Le nombre total des cas possibles est $n!$. Le nombre des cas pour lesquels une boule désignée n'est pas à son rang est

$$n!-(n-1)!, \tag{1}$$

car on doit l'obtenir en retranchant du nombre total des cas possibles le nombre des cas correspondant à la sortie du numéro désigné.

Pour obtenir le nombre des cas pour lesquels deux boules désignées ne sont pas à leur rang, on doit retrancher de l'expression (1) le nombre des cas correspondant à la sortie à son rang de la seconde boule, c'est-à-dire, retrancher de (1) l'expression analogue où l'on remplacerait n par $n-1$

$$(n-1)!-(n-2)!.$$

Le nombre des cas pour lesquels deux boules désignées ne sont ni l'une ni l'autre à leur rang est donc

$$n!-2(n-1)!+(n-2)!. \tag{2}$$

Le nombre des cas pour lesquels trois boules désignées ne sont pas à leur rang s'obtient en retranchant de l'expression (2) l'expression analogue où l'on remplacerait n par $n-1$, le nombre cherché est donc

$$n!-2(n-1)!+(n-2)!-[(n-1)!-2(n-2)!+(n-3)!]$$

ou

$$n!-3(n-1)!+3(n-2)!-(n-3)!.$$

En continuant le même raisonnement, on voit que le nombre des cas pour lesquels h boules ne sont pas à leur rang est

$$\mu!-h(\mu-1)!+\frac{h(h-1)}{1.2}(\mu-2)!-\ldots\pm(\mu-h)!.$$

La probabilité pour qu'aucune des boules désignées ne sorte à son rang est le quotient de cette expression par $n!$.

En supposant $h = n$, on obtient la probabilité pour que, dans le tirage de toutes les boules, aucune ne sorte à son rang; elle est

$$1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

99. Si l'on prolongeait cette série, elle représenterait le développement de e^{-1}; donc. excepté lorsque n est un petit nombre, on peut supposer que la probabilité a la valeur

$$e^{-1} = 0,36787944$$

très approchée: car si $n = 9$ la valeur exacte de la probabilité est 0,3678792 et elle ne diffère pas d'un millionième de e^{-1}.

Donc pour les valeurs de n supérieures à neuf, la probabilité est sensiblement indépendante de n.

100. *La probabilité pour qu'il y ait au moins une rencontre* a pour valeur exacte

$$1 - \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\right]$$

ou

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2.3\ldots n}$$

et pour valeur très approchée quand n est supérieur à neuf

$$1 - e^{-1} = 0,63212055\ldots$$

101. On peut traiter le même problème par une méthode d'approximation qui finalement conduit à un résultat exact.

Le nombre total des cas possibles est $n!$.

Le nombre des cas correspondant à une rencontre à un rang assigné est $(n-1)!$, car c'est le nombre des permutations des $n - 1$ numéros qui ne sont pas nécessairement à leur rang.

Le nombre des numéros que l'on a pu choisir pour la rencontre

étant n, le nombre des cas favorables est, en première approximation,

$$(n-1)!\,n = n!.$$

Ce nombre est trop fort, car le cas de deux numéros sortis à leur rang est compté double; nous devons donc de l'expression précédente, retrancher le nombre des cas où deux boules sont sorties à leur rang.

Pour obtenir ce nombre, nous devons prendre toutes les combinaisons de n numéros deux à deux, puis permuter les $n-2$ numéros qui ne sont pas nécessairement à leur rang; nous obtenons ainsi

$$\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)! = \frac{n!}{1.2}.$$

Le nombre des cas favorables est donc, en seconde approximation,

$$\frac{n!}{1} - \frac{n!}{1.2}.$$

Ce nombre est trop faible, nous avons en effet supprimé à tort le nombre des cas qui correspondent à la sortie à leur rang de trois numéros, c'est-à-dire

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)(n-4)\ldots 1 = \frac{n!}{1.2.3}.$$

Le nombre des cas favorables est donc, en troisième approximation,

$$\frac{n!}{1} - \frac{n!}{1.2} + \frac{n!}{1.2.3}$$

et finalement sa valeur exacte est

$$\frac{n!}{1} - \frac{n!}{1.2} + \frac{n!}{1.2.3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\,n!}{1.2.3\ldots n}.$$

Le nombre des cas possibles étant $n!$ la probabilité pour qu'il y ait au moins une rencontre est

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots n}.$$

102. *Quelle est la probabilité pour que la première rencontre ait lieu au $\mu^{\text{ième}}$ tirage?*

Le nombre des cas possibles est $n!$. Le nombre des cas où la boule marquée un sort première est $(n-1)!$.

Le nombre des cas où la boule marquée deux sort seconde, celle qui est marquée un n'étant pas sortie première est $(n-1)! - (n-2)!$.

Le nombre des cas où la boule marquée trois sort troisième, celle qui est marquée un n'étant pas sortie première ni celle qui est marquée deux, seconde, est

$$(n-1)! - (n-2)! - [(n-2)! - (n-3)!]$$

ou

$$(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!.$$

Le nombre des cas où la boule marquée quatre sort quatrième, aucune boule n'étant antérieurement sortie à son rang, est

$$(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)! - [(n-2)! - 2(n-3)! + (n-4)!]$$

ou

$$(n-1)! - 3(n-2)! + 3(n-3)! - (n-4)!$$

et plus généralement, le nombre des cas où la $\mu^{\text{ième}}$ boule sort à son rang, aucune autre boule n'étant antérieurement sortie au sien, est

$$(n-1)! - (\mu-1)(n-2)! + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}(n-3)!$$
$$- \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}(n-4)! + \ldots + (-1)^{\mu-2}(n-\mu)!.$$

La probabilité correspondante s'obtient en divisant cette quantité par le nombre $n!$ des cas possibles, on obtient ainsi

$$\frac{1}{n} - \frac{\mu-1}{1}\,\frac{1}{n(n-1)} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}\,\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$
$$- \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}\,\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \ldots$$
$$+ (-1)^{\mu-1}\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}.$$

Si l'on aditionne ces probabilités pour toutes les valeurs de μ de un à n, on obtient la formule déjà connue de la probabilité pour qu'il y ait au moins une rencontre

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2.3\ldots n}.$$

103. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins μ rencontres?*

On peut raisonner comme précédemment (n° 101) : Le nombre des cas où μ boules sortent à leur rang est $\frac{n!}{\mu!}$. Il faut retrancher de cette expression les cas répétés. Ces cas sont ceux pour lesquels $\mu+1$ boules sortent à leur rang, car ils peuvent résulter des $\mu+1$ boules prises μ à μ. Ces cas sont donc répétés $\mu+1$ fois et il faut les retrancher μ fois. Or le nombre des cas pour lesquelles $\mu+1$ boules sortent à leur rang est $\frac{n!}{(\mu+1)!}$.

Le nombre des cas favorables est donc, en seconde approximation,

$$\frac{n!}{\mu!}\left[1-\frac{\mu}{\mu+1}\right];$$

en continuant le même raisonnement, on obtient l'expression exacte de la probabilité cherchée

$$\frac{1}{\mu!}\left[1-\frac{\mu}{\mu+1}+\frac{1}{1.2}\frac{1}{\mu+2}-\frac{1}{1.2.3}\frac{\mu}{\mu+3}+\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots(n-\mu)}\frac{\mu}{n}\right].$$

104. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement μ rencontres?*

C'est la différence entre la probabilité pour qu'il y ait au moins μ rencontres et la probabilité pour qu'il y en ait au moins $\mu+1$. C'est donc la quantité

$$\frac{1}{\mu!}\left[1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(n-\mu)}\right].$$

La probabilité pour qu'il y ait exactement $n-1$ rencontres est nulle, car s'il y a $n-1$ rencontres il y en a nécessairement n.

105. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement μ rencontres à des rangs désignés?*

La quantité cherchée multipliée par le nombre des combinaisons de n numéros μ à μ doit reproduire la probabilité pour qu'il y ait exactement μ rencontres; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{(n-\mu)!}{n!}\left[1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(n-\mu)}\right].$$

106. *Quelle est l'espérance d'un joueur* H *qui reçoit* 1 *franc par rencontre?*

La probabilité d'une rencontre est pour chaque tirage $\frac{1}{n}$; l'espérance correspondante est $\frac{1}{n}$ et comme il doit y avoir n tirages, l'espérance totale est $n\,\frac{1}{n}$, c'est-à-dire 1 franc.

En d'autres termes, le joueur H peut vendre à n joueurs différents l'espérance de gagner 1 fr, à chacun d'eux correspondant un des n tirages. Chacun de ces joueurs ayant probabilité $\frac{1}{n}$ de gagner 1 fr devra acheter son espérance $\frac{1}{n}$. Le joueur H, dans ces conditions, recevrait 1 fr : telle est la valeur de son espérance mathématique.

Si l'on évaluait la probabilité des divers cas possibles, en nommant p_h la probabilité pour qu'il y ait exactement h rencontres, l'espérance demandée aurait pour expression

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n;$$

son calcul serait pénible (n° 104). Dans le cas présent comme dans bien d'autres, l'espérance mathématique totale s'obtient plus facilement que chacun des termes dont elle est la somme.

107. Le jeu de la rencontre se pratique surtout avec des cartes : D'un jeu de cinquante-deux cartes on extrait, par exemple, les treize cœurs, on mêle ces treize cartes et on les retourne l'une après l'autre; il y a rencontre si, par exemple, la septième carte retournée est un sept.

Le joueur qui tient la banque reçoit de ses adversaires autant de fois leur enjeu qu'il y a de rencontres; il leur paie la valeur de leur enjeu si aucune rencontre ne se produit.

D'après ce qui précède, le jeu de la rencontre est équitable. Comme on se sert de treize cartes, ce jeu s'appelait autrefois *jeu de treize*.

En réalité, on fait généralement usage d'un jeu de cartes complet ou même de plusieurs jeux, mais on retourne seulement treize cartes.

108. Pour traiter la question dans toute sa généralité, nous supposerons une urne contenant r boules marquées du numéro un, r boules

marquées du numéro deux, ..., r boules marquées du numéro n. On extrait successivement n boules.

En raisonnant comme précédemment (n° 102) on voit que la probabilité pour que la première rencontre ait lieu au $\mu^{\text{ième}}$ tirage est

$$\frac{1}{n} - \frac{(\mu-1)r}{n(rn-1)} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)r^2}{1.2.n(rn-1)(rn-2)} - \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)r^3}{1.2.3.n(rn-1)(rn-2)(rn-3)} + \ldots.$$

En ajoutant ces probabilités pour toutes les valeurs de μ depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = n$, on obtient la probabilité pour qu'il y ait au moins une rencontre

$$1 - \frac{(n-1)r}{1.2(rn-1)} + \frac{(n-1)(n-2)r^2}{1.2.3(rn-1)(rn-2)} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)r^3}{1.2.3.4(rn-1)(rn-2)(rn-3)} + \ldots.$$

La méthode des approximations successives (n° 101) aurait conduit à cette même expression; elle permet aussi de calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins μ rencontres, cette probabilité est

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)r^{\mu-1}}{\mu!(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-\mu+1)} \times \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{\mu}{\mu+1}\dfrac{(n-\mu)r}{rn-\mu} + \dfrac{\mu}{\mu+2}\dfrac{(n-\mu)(n-\mu-1)r^2}{1.2(rn-\mu)(rn-\mu-1)} \\ - \dfrac{\mu}{\mu+3}\dfrac{(n-\mu)(n-\mu-1)(n-\mu-2)r^3}{1.2.3(rn-\mu)(rn-\mu-1)(rn-\mu-2)} + \ldots \end{array} \right\}.$$

109. L'espérance mathématique d'un joueur B à qui l'on promettrait 1 fr par rencontre serait 1 fr comme dans le cas particulier précédemment étudié et pour la même raison.

110. Si l'on joue avec des cartes et si, après chaque tirage, on remet dans le jeu la carte sortie, les probabilités sont les mêmes que si le nombre des jeux de cartes était infini.

Les divers problèmes relatifs aux rencontres sont alors des cas particuliers de la théorie générale des épreuves répétées qui a été exposée précédemment.

La probabilité, pour qu'il y ait une rencontre à un numéro désigné, est $\frac{1}{n}$.

La probabilité pour qu'il n'y ait pas de rencontre à un numéro désigné est $1 - \frac{1}{n}$ et, par suite, la probabilité pour qu'il n'y ait aucune rencontre est

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Si n n'est pas un petit nombre, cette probabilité est très voisine de $e^{-1} = 0,36787944\ldots$.

La probabilité pour qu'il y ait au moins une rencontre est

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

elle est très voisine de $1 - e^{-1} = 0,63212055\ldots$ quand n n'est pas un petit nombre.

La probabilité pour que la première rencontre ait lieu au $\mu^{\text{ième}}$ tirage est

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mu - 1} \frac{1}{n}.$$

La probabilité pour qu'il y ait exactement μ rencontres est

$$\frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\mu}.$$

Si l'on promet à un joueur H autant de francs qu'il se produira de rencontres, son espérance est 1 fr.

111. Lorsqu'il y a un seul paquet de treize cartes, la probabilité pour qu'il y ait au moins une rencontre est 0,63212.

Lorsque le nombre des jeux de cartes est infini, la même probabilité a pour valeur 0,64674. La probabilité, pour qu'il y ait au moins une rencontre, est donc à peu près indépendante du nombre des jeux employés.

112. **Jeux de dés.** — *Quelle est la probabilité d'amener un point donné avec des dés?*

Les dés ont ordinairement six faces marquées 1, 2, ..., 6, mais pour plus de généralité nous supposerons des dés de f faces marquées 1, 2, ..., f.

Si μ dés semblables sont jetés en même temps, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre de points donné k?

On peut encore présenter ce problème de la manière suivante : Une urne contient f boules numérotées 1, 2, ..., f. Quelle est la probabilité pour que, en μ tirages, la somme des numéros sortis soit égale à k si, après chaque tirage, la boule extraite est replacée dans l'urne.

Le nombre des cas possibles est f^μ puisque chaque dé compte f faces.

Le nombre des cas favorables est le nombre des manières de former une somme égale à k avec μ nombres inférieurs à $f+1$. Cette somme est le coefficient de x^k dans le développement de

$$(1)\qquad (x+x^2+\ldots+x^f)^\mu$$

ordonné suivant les puissances de x. On a

$$x+x^2+\ldots+x^f=\frac{x-x^{f+1}}{1-x}.$$

L'expression (1) peut s'écrire

$$(2)\qquad x^\mu(1-x^f)^\mu(1-x)^{-\mu}.$$

Or

$$(1-x^f)^\mu=1-\frac{\mu}{1}x^f+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{2f}-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^{3f}+\ldots,$$

$$(1-x)^{-\mu}=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\ldots.$$

Il faut chercher la somme des coefficients de x^k dans le développement de (2) ou celle des coefficients de $x^{k-\mu}$ dans le produit des deux séries ci-dessus.

Au premier coefficient de la première série correspond le coefficient de $x^{k-\mu}$ dans la seconde; au second coefficient de la première série correspond le coefficient de $x^{k-\mu-f}$ dans la seconde, etc.

Le coefficient cherché a donc pour valeur

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(k-1)}{1.2\ldots(k-\mu)}-\frac{\mu}{1}\,\frac{\mu(\mu-1)\ldots(k-1-f)}{1.2\ldots(k-\mu-f)}$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,\frac{\mu(\mu-1)\ldots(k-1-2f)}{1.2\ldots(k-\mu-2f)}-\ldots,$$

série que l'on continue tant que les termes sont positifs.

En divisant cette quantité par le nombre f^μ des cas possibles, on obtient la probabilité cherchée.

113. S'il y a deux dés de six faces, les probabilités d'amener les points 2, 3, ..., 12 sont respectivement

$$\frac{1}{36}\;\frac{2}{36}\;\frac{3}{36}\;\frac{4}{36}\;\frac{5}{36}\;\frac{6}{36}\;\frac{5}{36}\;\frac{4}{36}\;\frac{3}{36}\;\frac{2}{36}\;\frac{1}{36}.$$

Au point sept correspond la plus grande probabilité $\frac{1}{6}$. Les probabilités sont symétriques par rapport à la plus grande, résultat évident.

On jouait autrefois, avec trois dés, le jeu du *passe dix*; l'un des joueurs gagnait si la somme des points dépassait dix et perdait dans le cas contraire. La probabilité de gagner était $\frac{1}{2}$, car le point dix a même probabilité que le point onze, le point neuf a même probabilité que le point douze, etc.

La même symétrie existe évidemment, quel que soit le nombre des dés et le point le plus probable est toujours le point médian. Si, par exemple, il y a quatre dés, le point minimum est quatre et le point maximum vingt-quatre. Le point de plus grande probabilité est quatorze. S'il y a cinq dés, les points dix-sept et dix-huit sont les plus probables, etc.

114. **Jeu de la poule.** — Trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : A et B jouent ensemble; C ne joue pas. Le perdant sort et est remplacé par C. De même, après chaque partie, le perdant est remplacé. Le jeu prend fin quand un joueur gagne deux fois de suite.

On suppose que le jeu considéré est un jeu de hasard et que la probabilité de gagner une partie est $\frac{1}{2}$ pour chaque joueur.

Les probabilités pour que le jeu se termine à la seconde partie, à la troisième, à la quatrième, à la $\mu^{\text{ième}}$, sont respectivement

$$\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \ldots, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}, \quad \ldots,$$

car il y a, à chaque partie, une chance sur deux pour que le jeu se termine; la probabilité relative à une partie est donc la moitié de la probabilité relative à la partie précédente.

115. La probabilité pour que le jeu se termine en μ parties est

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}=\frac{2^{\mu-1}-1}{2^{\mu-1}}.$$

La probabilité pour que le jeu ne soit pas terminé en μ parties est

$$1-\frac{2^{\mu-1}-1}{2^{\mu-1}}=\frac{1}{2^{\mu-1}}.$$

On aurait obtenu cette même valeur en remarquant que, si le jeu a duré plus de μ parties, c'est que, A ayant gagné la première partie, C a gagné la seconde, B la troisième, A la quatrième, etc., ou que, B ayant gagné la première partie, C a gagné la seconde, A la troisième, etc. A l'une des deux hypothèses correspond la probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}$ et par suite la probabilité totale est $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}$.

116. Le joueur C ne peut terminer le jeu qu'en gagnant la troisième partie, ou la sixième, ou la neuvième, etc., sa probabilité totale est donc

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\ldots=\frac{4}{14}.$$

La probabilité du gain final du joueur C est donc $\frac{4}{14}$ et les probabilités des deux joueurs A et B sont $\frac{5}{14}$.

117. Lorsqu'il n'y a que trois joueurs, on peut supposer à ceux-ci des probabilités différentes sans trop compliquer les calculs.

Supposons, par exemple, que A jouant avec B ait probabilité p pour gagner une partie et probabilité $q = 1 - p$ pour perdre; jouant avec C les probabilités correspondantes seraient p' et q'. Enfin, B jouant avec C aurait probabilité p'' pour gagner une partie et probabilité q'' pour perdre. Pour que le jeu ne soit pas encore terminé à la $k^{\text{ième}}$ partie, il faut que l'une ou l'autre des éventualités suivantes se réalise :

A gagne la première partie, C la seconde, B la troisième, A la quatrième, ..., les joueurs gagnant successivement. La probabilité correspondante est

$$pq'p''pq'p''pq'p''\ldots;$$

la formule se compose de k termes.

Dans la seconde hypothèse, B gagne la première partie, C la seconde, A la troisième, B la quatrième... et la probabilité est

$$qq''p'qq''p'qq''p'\ldots;$$

la somme de ces deux quantités est la probabilité pour que le jeu ne soit pas encore terminé à la $k^{\text{ième}}$ partie.

La probabilité pour que le jeu se termine à la $(k+1)^{\text{ième}}$ partie est égale au produit de la probabilité pour qu'il ne soit pas terminé à la $k^{\text{ième}}$ partie par la probabilité pour qu'il se termine à la partie suivante. Par exemple, la probabilité, pour que le jeu se termine à la huitième partie, est

$$pq'p''pq'p''p \times p' + qq''p'qq''p'q \times p''.$$

Le joueur C ne peut gagner finalement que si le jeu se termine à la troisième, la sixième, la neuvième,... partie; la probabilité totale de son gain final est donc

$$\begin{aligned} &pq'q'' + (pq'p'')pq'q'' + (pq'p'')^2 pq'q'' + \ldots \\ &\quad + qq''q' + (qq''p')qq''q' + (qq''p')^2 qq''q' + \ldots \end{aligned}$$

ou

$$\frac{pq'q''}{1 - pq'p''} + \frac{qq'q''}{1 - qp'q}.$$

Le joueur A peut gagner finalement à la seconde, la cinquième, la huitième,... partie; la probabilité de cette éventualité est

$$pp' + (pq'p'')pp' + (pq'p'')^2 pp' + \ldots$$

il peut aussi gagner à la quatrième, la septième, la dixième, . . . partie, la probabilité est

$$(qq''p')p + (qq''p')^2 p + (qq''p')^3 p + \ldots.$$

La probabilité totale pour qu'il gagne finalement est donc

$$\frac{pp'}{1 - pq'p''} + \frac{pqp'q''}{1 - qp'q''}.$$

La probabilité totale du gain final du joueur B est

$$\frac{qp''}{1 - qp'q''} + \frac{qpq'p''}{1 - pq'p''}.$$

La somme des probabilités relatives aux trois joueurs est *un*, résultat évident.

Dorénavant, nous supposerons que les joueurs ont même probabilité de gagner une partie.

118. Nous allons calculer la *durée moyenne* du jeu. On désigne ainsi l'espérance mathématique d'un joueur H qui devrait toucher 1 fr par partie jouée.

La durée moyenne du jeu considéré, lorsqu'il y a trois joueurs, est

$$\left(\frac{1}{2}\right) \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4 + \ldots.$$

Cette série se décompose, comme on sait, en une somme de progressions géométriques; sa valeur est trois. La durée moyenne du jeu est donc trois parties.

119. On peut arriver au même résultat par une voie différente : Soit y la durée moyenne du jeu, et soit y_1 la durée moyenne lorsque l'un des joueurs a gagné une partie; on a

$$y = 1 + y_1,$$

car une première partie doit être jouée, un des joueurs la gagnera et la durée moyenne deviendra y_1 après cette partie.

On aura de même

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2} y_1.$$

En effet, on jouera encore une partie, et deux cas également probables seront à distinguer : ou le joueur qui a gagné la première partie gagnera encore la seconde et le jeu sera terminé, ou bien ce même joueur perdra cette seconde partie et la durée moyenne du jeu sera, à partir de ce moment, y_1.

Les deux équations qui précèdent sont donc légitimes et l'on en déduit

$$y_1 = 2, \qquad y = 3.$$

La durée moyenne du jeu est donc trois parties, comme nous l'avions trouvé.

120. Plusieurs joueurs A, B, C, D... en nombre $n+1$ peuvent jouer dans des conditions analogues : A et B jouent ensemble, C, D, ... ne jouent pas; celui des joueurs A et B qui perd sort du jeu pour n'y rentrer qu'après que tous les autres ont joué, celui qui gagne joue avec C; s'il gagne encore il joue avec D, s'il perd il devient le dernier du jeu et C joue avec D. Un joueur continue ainsi à jouer successivement avec ses différents adversaires tant qu'il gagne; il devient le dernier du jeu quand il perd.

Le jeu prend fin quand un des joueurs a gagné n parties de suite, c'est-à-dire quand il a vaincu successivement tous ses adversaires.

Supposons d'abord qu'il y ait quatre joueurs A, B, C, D; soient : y la durée moyenne du jeu, y_1 la durée moyenne lorsque l'un des joueurs a gagné une partie, et y_2 la durée moyenne lorsque l'un des joueurs a gagné deux parties de suite : on a

$$y = 1 + y_1$$

pour la même raison que précédemment et

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_1,$$

car on doit jouer la seconde partie; puis deux cas également probables peuvent se produire : le joueur qui a gagné la première partie gagne la seconde et la durée moyenne devient y_2 ou ce même joueur perd cette partie et la durée moyenne devient y_1.

On aurait de même

$$y_2 = 1 + \frac{1}{2} y_1,$$

car un des joueurs ayant gagné deux parties de suite et la partie suivante étant jouée, deux cas également probables sont à distinguer : ou le joueur a gagné cette dernière partie et le jeu est arrêté, ou il a perdu cette partie et la durée moyenne devient y_1.

Des trois équations qui précèdent on tire

$$y_2 = 4, \qquad y_1 = 6, \qquad y = 7.$$

La durée moyenne du jeu est sept parties.

121. On calculerait de même la durée moyenne y pour un nombre quelconque $n+1$ de joueurs; en désignant par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ la durée moyenne, lorsque l'un des joueurs a gagné une, deux, ..., n parties, on est ramené à la résolution des équations du premier degré

$$\begin{array}{llll}
y & = 1 + y_1, & \text{d'où} & y_1 = y - 1. \\
y_1 & = 1 + \dfrac{y_2}{2} + \dfrac{y_1}{2} & \text{»} & y_2 = y_1 - 2. \\
y_2 & = 1 + \dfrac{y_3}{2} + \dfrac{y_1}{2} & \text{»} & y_3 = y_2 - 4. \\
y_3 & = 1 + \dfrac{y_4}{2} + \dfrac{y_1}{2} & \text{»} & y_4 = y_3 - 8. \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & . & \ldots\ldots\ldots \\
y_{n-1} & = 1 + \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{y_1}{2} & \text{»} & y_{n-1} = y_{n-2} - 2^{n-2}, \\
y_n & = 0 & \text{»} & y_n = y_{n-1} - 2^{n-1},
\end{array}$$

En ajoutant toutes les dernières égalités et en remarquant que $y_n = 0$, on obtient

$$y = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

La durée moyenne du jeu est donc $2^n - 1$ parties.

122. **Théorie des réussites successives.** — *Soit p la probabilité d'un événement à chaque épreuve : Quelle est la valeur moyenne du*

nombre des épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement se produise n fois de suite?

Soit u_x cette valeur moyenne quand l'événement s'est produit x fois de suite, on a

$$u_x = 1 + pu_{x+1} + (1-p)u_0.$$

En effet, l'épreuve suivante a nécessairement lieu, ce qui augmente la valeur moyenne de *un*. A cette épreuve, il y a probabilité p pour que l'événement se produise et probabilité $1-p$ pour qu'il ne se produise pas: la valeur moyenne devenant u_{x+1} dans le premier cas et u_0 dans le second, l'équation est exacte.

De cette équation on déduit

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 + pu_1 + (1-p)u_0, \\ u_1 &= 1 + pu_2 + (1-p)u_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1} &= 1 + pu_n + (1-p)u_0, \\ u_n &= 0. \end{aligned}$$

Multipliant la seconde équation par p, la troisième par p^2, la quatrième par p^3, ... et additionnant, on obtient

$$u_0 = \frac{1-p^n}{(1-p)p^n},$$

Telle est la valeur moyenne cherchée.

123. *A chaque épreuve la probabilité de l'événement* A *est p et celle de l'événement* B *est $q = 1 - p$. Quelle est la valeur moyenne du nombre des épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement* A *se produise n fois de suite ou l'événement* B, *m fois de suite?*

La durée moyenne d'un jeu étant, par définition, la valeur moyenne du nombre des parties jouées (ou, en d'autres termes, l'espérance mathématique d'un joueur qui devrait toucher 1 fr par partie jouée), on peut encore énoncer le problème précédent sous la forme suivante :

Le joueur A a probabilité p pour gagner une partie et le joueur B a pour probabilité $q = 1 - p$. Le jeu prend fin quand le joueur A a gagné

n parties de suite, ou quand le joueur B a gagné m parties de suite. Quelle est la durée moyenne du jeu?

En désignant par u cette quantité, on a

$$u = 1 + p y_1 + q z_1,$$

y_1 étant la durée moyenne du jeu quand le joueur A a gagné une partie et z_1 étant la durée moyenne quand le joueur B a gagné une partie.

En effet, une première partie est jouée, puis il y a probabilité p pour que le joueur A gagne et par suite pour que la durée moyenne du jeu devienne y_1 et probabilité q pour que le joueur B gagne et pour que la durée moyenne devienne z_1.

Désignons par y_x la durée moyenne du jeu lorsque le joueur A a gagné x parties de suite et par z_x la durée moyenne lorsque le joueur B a gagné x parties de suite, on a

$$(1) \qquad y_x = 1 + p y_{x+1} + q z_1$$

car la partie suivante étant jouée, ce qui augmente la durée moyenne d'une unité, il y a probabilité p pour que le joueur A gagne et, par suite, pour que la durée moyenne devienne y_{x+1} et probabilité q pour que le joueur B gagne et pour que la durée moyenne devienne z_1.

On a de même

$$(2) \qquad z_x = 1 + q z_{x+1} + p y_1.$$

Les équations linéaires aux différences finies (1) et (2) peuvent s'intégrer par la méthode générale (n° 132) mais on peut facilement obtenir leur solution sans avoir recours à cette théorie.

De l'équation (1) on déduit successivement

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + p y_2 + q z_1,\\
y_2 &= 1 + p y_3 + q z_1,\\
y_3 &= 1 + p y_4 + q z_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1} &= 1 + p y_n + q z_1;
\end{aligned}$$

multipliant la seconde égalité par p, la troisième par p^2, ..., la dernière par p^{n-2} et additionnant, on obtient

$$y_1 = \frac{1 - p^{n-1}}{q} + p^{n-1} y_n + (1 - p^{n-1}) z_1,$$

ou simplement, puisque $y_n = 0$,

(3) $$y_1 = \frac{1 - p^{n-1}}{q} + (1 - p^{n-1}) z_1,$$

De l'équation (2) on déduit successivement

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + q z_2 + p y_1, \\ z_2 &= 1 + q z_3 + p y_1, \\ z_3 &= 1 + q z_4 + p y_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{m-1} &= 1 + q z_m + p y_1; \end{aligned}$$

multipliant la seconde égalité par q, la troisième par q^2, ..., la dernière par q^{m-2} et additionnant, on obtient

$$z_1 = \frac{1 - q^{m-1}}{p} + q^{m-1} z_m + (1 - q^{m-1}) y_1.$$

ou simplement, puisque $z_m = 0$,

(4) $$z_1 = \frac{1 - q^{m-1}}{p} + (1 - q^{m-1}) y_1.$$

Des équations (3) et (4) on déduit

$$y_1 = \frac{p(1 - p^{n-1}) + q(1 - q^{m-1})(1 - p^{n-1})}{pq[p^{n-1} - q^{m-1}p^{n-1} + q^{m-1}]},$$

$$z_1 = \frac{q(1 - q^{m-1}) + p(1 - p^{n-1})(1 - q^{m-1})}{pq[q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1} + p^{n-1}]},$$

et puisque

$$u = 1 + p y_1 + q z_1,$$

on obtient finalement

$$u = 1 + \frac{p^2(1 - p^{n-1}) + 2pq(1 - p^{n-1})(1 - q^{m-1}) + q^2(1 - q^{m-1})}{pq[p^{n-1} - q^{m-1}p^{n-1} + q^{m-1}]}.$$

Telle est l'expression de la valeur moyenne cherchée.

Si l'on a, en même temps, $m = n$ et $p = q = \frac{1}{2}$, la formule se réduit à $2^n - 1$.

124. *A chaque partie il y a probabilité p pour que le joueur A gagne et probabilité $q = 1 - p$ pour que le joueur B gagne. Le jeu prend fin*

quand le joueur A a gagné n parties de suite ou quand le joueur B a gagné m parties de suite. Quelle est la probabilité pour que le jeu se termine par le gain final du joueur A?

Soit u_x la probabilité cherchée quand le joueur A a gagné x parties de suite et soit u_{-x} cette probabilité quand le joueur B a gagné x parties de suite, on a

$$u_x = pu_{x+1} + qu_{-1};$$

en effet, en jouant la prochaine partie, le joueur A a la probabilité p de gagner et la probabilité q de perdre; dans le premier cas, la probabilité de son gain final devient u_{x+1} et dans le second cas elle devient u_{-1}. De l'équation qui précède, conséquence immédiate des principes des probabilités composées et totales, on déduit

$$\begin{aligned} u_1 &= pu_2 + qu_{-1}, \\ u_2 &= pu_3 + qu_{-1}, \\ u_3 &= pu_4 + qu_{-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1} &= pu_n + qu_{-1}; \end{aligned}$$

multipliant la seconde égalité par p, la troisième par p^2, ..., la dernière par p^{n-2} et additionnant, on obtient

$$u_1 = p^{n-1} u_n + u_{-1}(1 - p^{n-1})$$

ou, puisque $u_n = 1$,

(1) $$u_1 = p^{n-1} + u_{-1}(1 - p^{n-1}).$$

On a évidemment

$$u_{-x} = pu_1 + qu_{-(x+1)},$$

car en jouant la prochaine partie le joueur A a la probabilité p de gagner; la probabilité de son gain final est alors u_1. Il a aussi la probabilité q de perdre; la probabilité de son gain final est alors u_{-x-1}.

On déduit de cette dernière équation

$$\begin{aligned} u_{-1} &= pu_1 + qu_{-2}, \\ u_{-2} &= pu_1 + qu_{-3}, \\ u_{-3} &= pu_1 + qu_{-4}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{-(m-1)} &= pu_1 + qu_{-m}. \end{aligned}$$

multipliant la seconde égalité par q, la troisième par q^2, . . . la dernière par q^{m-2}, on obtient

$$u_{-1} = q^{m-1} u_{-m} + u_1(1 - q^{m-1}),$$

u_{-m} qui exprime la probabilité de gain final du joueur A quand son adversaire a gagné m parties de suite est nul, on a donc

$$(2) \qquad u_{-1} = u_1(1 - q^{m-1}).$$

Les équations (1) et (2) déterminent u_1 et u_{-1}

$$u_1 = \frac{p^{n-1}}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1} q^{m-1}},$$

$$u_{-1} = \frac{p^{n-1}(1 - q^{m-1})}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1} q^{m-1}}.$$

La probabilité X du gain final du joueur A a évidemment pour valeur

$$X = pu_1 + qu_{-1},$$

car ce joueur a probabilité p de gagner la première partie qu'il joue et probabilité q de perdre cette partie ; on a donc

$$X = \frac{p^{n-1}(1 - q^m)}{p^{n-1} - p^{n-1} q^{m-1} + q^{m-1}}.$$

La probabilité du gain final du joueur B est de même

$$Y = \frac{q^{m-1}(1 - p^n)}{p^{n-1} - p^{n-1} q^{m-1} + q^{m-1}}.$$

La somme $X + Y$ des probabilités a pour valeur *un*, résultat évident.

125. On peut déduire l'expression des probabilités de celle de la durée moyenne : Soit $U_{m.n}$ cette durée moyenne quand le joueur A doit gagner n parties de suite ou le joueur B, m parties de suite ; on a

$$U_{n,m} = U_{n,\infty} - YU_{n,\infty}.$$

En effet, si m était infini et si, par suite, le joueur A pouvait seul gagner finalement, la durée moyenne serait $U_{n,\infty}$. Cette quantité $U_{n,\infty}$ peut être considérée comme composée de deux sortes de termes :

1° Ceux qui correspondent aux alternatives de gain et de perte du joueur A qui n'amèneraient pas le gain final du joueur B si celui-ci pouvait gagner finalement par m réussites;

2° Ceux qui correspondent aux alternatives de gain et de perte du joueur A qui amèneraient le gain final du joueur B si celui-ci pouvait gagner par m réussites.

Considérons ce second cas dont la probabilité est Y; le jeu se trouve, à un moment donné, arrêté par m réussites successives du joueur B.

A cet instant, si le jeu pouvait continuer jusqu'à ce que le joueur A ait gagné par n réussites successives, la durée moyenne serait $U_{n,\infty}$.

La possibilité du gain final du joueur B diminue, donc la durée moyenne de la quantité $YU_{n,\infty}$ et l'équation qui précède est exacte, on peut l'écrire

$$U_{n,m} = XU_{n,\infty} \qquad \text{d'où} \qquad X = \frac{U_{n,m}}{U_{n,\infty}}.$$

En remplaçant dans cette expression $U_{n,m}$ et $U_{n,\infty}$ par leurs valeurs on obtient, comme précédemment,

$$X = \frac{p^{n-1}(1-q^m)}{p^{n-1} - p^{n-1}q^{m-1} + q^{m-1}}.$$

126. Supposons qu'à chaque partie il y ait un seul gagnant. Le joueur A a probabilité p pour gagner, le joueur B a pour probabilité q, le joueur C a pour probabilité r, ... Le jeu prend fin quand le joueur A a gagné n parties de suite, ou quand le joueur B a gagné m parties de suite, ou quand C a gagné λ parties de suite, ... Les probabilités pour que le jeu se termine par le gain final du joueur A, du joueur B, du joueur C, ... sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{(1-p)p^n}{1-p^n}, \quad \frac{(1-q)q^m}{1-q^m}, \quad \frac{(1-r)r^\lambda}{1-r^\lambda}, \quad \ldots.$$

On le démontre par un procédé analogue à celui dont nous avons fait précédemment usage (n° 124).

127. S'il y a k joueurs ayant égale probabilité $\frac{1}{k} = p$ de gagner une partie, et si le jeu prend fin par le gain successif de n parties par un

même joueur quelconque, la durée moyenne du jeu a une expression très simple.

Soit, en effet, u_x cette durée moyenne quand un des joueurs n'a plus que x parties à gagner pour que le jeu prenne fin; on a

$$u_x = 1 + pu_{x-1} + (1-p)u_{n-1}, \tag{1}$$

car une première partie sera nécessairement jouée et la durée moyenne deviendra u_{x-1} ou u_{n-1} suivant que cette partie sera gagnée par le joueur qui n'a plus que x points à faire ou par un des autres.

On déduit de cette équation

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} u_{x-1} & = 1 + pu_{x-2} + (1-p)u_{n-1}, \\ u_{x-2} & = 1 + pu_{x-3} + (1-p)u_{n-1}, \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\ u_2 & = 1 + pu_1 \quad + (1-p)u_{n-1}, \\ u_1 & = 1 + pu_0 \quad + (1-p)u_{n-1}; \end{array}\right.$$

multipliant la première équation (2) par p, la seconde par p^2, ... la dernière par p^{x-1} et ajoutant leur somme avec l'équation (1), on obtient, en remarquant que u_0 est nul,

$$u_x = \frac{1-p^x}{1-p} + (1-p^x)u_{n-1}.$$

Posant $x = n-1$, on a

$$u_{n-1} = \frac{1-p^{n-1}}{(1-p)p^{n-1}}.$$

La durée moyenne cherchée est évidemment $1 + u_{n-1}$, c'est-à-dire

$$\frac{1-p^n}{(1-p)p^{n-1}}$$

et, en remplaçant p par $\frac{1}{k}$, son expression devient

$$\frac{k^n-1}{k-1}.$$

128. **Équations aux différences finies.** — Plusieurs problèmes nous ont conduit à des équations aux différences finies; par exemple, le problème des tirages dans une urne (n° 95) nous a conduit à

l'équation

$$u_x = 1 + \frac{x}{n} u_{x-1} + \frac{n-x}{n} u_x$$

qui est aux différences finies à une seule variable. L'équation (nº 80)

$$(x+y) Z_{x,y} = x Z_{x-1,y} + y Z_{x,y-1}$$

est *aux différences finies partielles* à deux variables.

129. Je suppose qu'un problème conduise à une équation aux différences finies : $f = 0$, et que l'on connaisse la solution la plus générale de cette équation. Cette solution la plus générale contiendra des constantes ou des fonctions arbitraires que l'on déterminera par les conditions spéciales du problème considéré.

Par analogie avec les équations de la Physique mathématique, l'équation générale du problème, $f = 0$, est dite *équation indéfinie*. Les conditions spéciales qui déterminent les constantes ou les fonctions arbitraires sont nommées pour la même raison : conditions relatives à l'état initial et conditions aux limites.

Ainsi, relativement à un problème précédemment traité (nº 81),

$$v_{x,y} = \frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+y} v_{x-1,y} + \frac{y}{x+y} v_{x,y-1}$$

est l'équation indéfinie du problème,

$$v_{0,y} = 0 \qquad \text{et} \qquad v_{x,0} = 0$$

sont les conditions ou équations aux limites.

130. Il n'est généralement pas possible de présenter la solution (ou intégrale) d'une équation aux différences sous sa forme analytique la plus générale, mais, dans bien des cas, la connaissance de cette solution n'est pas nécessaire; il suffit, en effet, de connaître la solution la plus générale compatible avec les équations aux limites et qui n'est qu'une solution particulière de l'équation indéfinie.

Lorsqu'il ne paraît pas possible d'intégrer une équation aux différences : l'équation indéfinie, dite aussi équation de récurrence, permet généralement de déterminer de proche en proche les différentes

valeurs numériques de la fonction considérée. Les calculs sont d'ailleurs impraticables quand les variables peuvent prendre un grand nombre de valeurs.

131. Les équations aux différences finies présentent des analogies avec les équations aux différences infiniment petites (équations différentielles); leur théorie a été l'objet d'études considérables que nous ne pouvons reproduire ici.

Nous nous contenterons de montrer qu'on peut toujours intégrer les équations aux différences quand elles sont linéaires et à coefficients constants.

132. Considérons l'équation

$$A_k y_{x+k} + A_{k-1} y_{x+k-1} + \ldots + A_1 y_{x-1} + A_0 y_x = 0, \tag{1}$$

où les A sont des coefficients constants; c'est une équation aux différences finies linéaires et à coefficients constants, dont l'intégration rappelle celle des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

On pose

$$y_x = C v^x,$$

C et v sont indéterminés, on a donc

$$y_{x+1} = C v^{x+1}, \qquad y_{x+2} = C v^{x+2}, \qquad \ldots,$$

et si l'on substitue dans l'équation (1) elle devient divisible par Cv^x et l'on a, après cette division

$$A_k v^k + A_{k-1} v^{k-1} + \ldots + A_1 v + A_0 = 0. \tag{2}$$

Le coefficient C qui ne figure pas dans cette équation demeure arbitraire.

Cette équation étant du degré k déterminera, en général, pour v, k valeurs différentes, $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

En multipliant chacune de ces quantités v^x par des constantes quelconques, on obtiendra les k expressions

$$C_1 v_1^x, \quad C_2 v_1^x, \quad \ldots, \quad C_k v_k^x$$

qui vérifieront l'équation (1), et, comme celle-ci est linéaire, la somme de ces k expressions vérifiera également l'équation (1), de sorte qu'on aura, en général,

$$y_x = C_1 e_1^x + C_2 e_2^x + \ldots + C_k e_k^x.$$

Comme cette valeur de y_x contient k constantes arbitraires, C_1, $C_2, \ldots, C_k$ elle est l'intégrale générale de l'équation (1) de l'ordre k.

L'équation (1) est souvent appelée *équation de récurrence* et l'équation (2) *équation caractéristique.*

133. Comme pour les équations différentielles linéaires, lorsque l'équation caractéristique admet une racine double $e_1 = e_2$, les intégrales particulières correspondantes sont

$$C_1 e_1^x \quad \text{et} \quad C_2 x e_1^x.$$

Dans le cas d'une racine triple, $e_1 = e_2 = e_3$, les intégrales particulières seraient

$$C_1 e_1^x, \quad C_2 x e_1^x, \quad C_3 x^2 e_1^x.$$

134. Cette analogie avec les équations différentielles linéaires subsiste pour les équations à second membre : L'intégrale générale de l'équation avec second membre peut s'obtenir en ajoutant à l'intégrale générale de l'équation privée de second membre une intégrale particulière de l'équation complète.

Si le second membre est constant, l'équation complète admet une constante C pour solution particulière.

Car, en posant $y = C$ dans l'équation complète

$$A_k y_{x+k} + A_{k-1} y_{x+k-1} + \ldots + A_1 y_{x+1} + A_0 y_x = H,$$

celle-ci devient

$$C(A_k + A_{k-1} + \ldots + A_1 + A_0) = H$$

et détermine C, à moins que la somme des coefficients A_k, $A_{k-1}, \ldots$ ne soit nulle.

La solution particulière est alors de la forme $y = Cx$, car en substituant cette valeur dans l'équation complète elle devient

$$Cx(A_k + A_{k-1} + \ldots A_1 + A_0) + C[kA_k + (k-1)A_{k-1} + \ldots + A_1] = H,$$

la première ligne est nulle, la seconde détermine C à moins que le multiplicateur de C ne soit nul.

Alors la solution particulière est de la forme $y = Cx^2$; en substituant cette valeur dans l'équation complète, on obtient, après avoir supprimé les termes nuls,

$$C[k^2 A_k + (k-1)^2 A_{k-1} + \ldots + A_1] = H$$

qui détermine C, à moins que le coefficient de C ne soit nul, etc.

On traiterait de la même manière et par analogie, avec les équations différentielles linéaires, les équations dont le second membre serait un polynome en x.

CHAPITRE IV.

SECOND PROBLÈME DE LA THÉORIE DU JEU.

135. Nous allons reprendre l'étude de la théorie générale du jeu dont les éléments ont été exposés dans le second chapitre.

Nous avons supposé deux joueurs ayant à leur disposition une somme indéfinie, jouant un nombre de parties convenu, et réglant à la fin du jeu les différences. C'est le premier problème de la théorie du jeu.

Nous allons aborder maintenant l'étude du second problème : la somme totale que l'un des joueurs veut risquer au jeu, et que, pour simplifier, nous appellerons sa *fortune*, est limitée ; la fortune de son adversaire est supposée infinie.

Ces conditions sont réalisables ; en effet, jouer contre tout adversaire qui se présente, c'est, en réalité, jouer contre un adversaire de fortune infinie.

Nous dirons, pour simplifier, que le joueur est ruiné quand il a perdu la somme totale qu'il consacrait au jeu.

136. Pour bien différencier le problème actuel de celui que nous venons de traiter, on doit supposer que, après chaque partie, le perdant verse son enjeu au gagnant. Dans ces conditions le joueur dont la fortune est limitée pourra, à un moment donné, avoir perdu sans espoir de retour la somme totale qu'il voulait jouer.

Nous étudierons constamment le sort du joueur qui a une fortune finie, le sort de son adversaire de fortune infinie, s'en déduisant immédiatement.

Le principal problème que nous aurons à résoudre sera alors le

suivant : Le joueur A ayant une fortune finie m et son adversaire B une fortune infinie, quelle est, dans des conditions données, la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ pour que le jeu s'arrête, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, par la ruine du joueur A. Ou encore : quelle est la probabilité $P_{\mu,m}$ pour que la ruine du joueur A se produise en jouant au maximum μ parties. La connaissance d'une des probabilités Π ou P entraîne la connaissance de l'autre.

Nous nous occuperons d'abord du cas particulier du jeu équitable et des probabilités égales. Il nous a été possible de simplifier beaucoup l'étude de ce dernier cas, en sorte qu'il constitue un des problèmes les plus élémentaires du calcul des probabilités. Une simple remarque permet de passer de ce cas particulier au cas beaucoup plus général où les probabilités sont quelconques, les enjeux restant égaux. Enfin la théorie des probabilités continues résout le problème quelles que soient les conditions du jeu.

137. Cas où le jeu est symétrique. — *Un joueur A possède m francs; il a, pour chaque partie, probabilité égale de gagner ou de perdre 1 fr; quelle est la probabilité pour qu'il perde ses m francs en jouant au maximum μ parties?*

Désignons comme précédemment (nº 52) par $\varpi_{\mu,m}$ la probabilité qu'aurait le joueur A de perdre m francs à la $\mu^{\text{ième}}$ partie si sa fortune était infinie

$$\varpi_{\mu,m} = \frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}\, p^{\frac{\mu-m}{2}} q^{\frac{\mu+m}{2}}.$$

Désignons encore par $\mathfrak{P}_{\mu,m}$ la probabilité qu'aurait le joueur A de perdre une somme égale ou supérieure à m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie si sa fortune était infinie

$$\mathfrak{P}_{\mu,m} = \varpi_{\mu,m} + \varpi_{\mu,m+2} + \ldots + \varpi_{\mu,\mu}.$$

Soit enfin $P_{\mu,m}$ la probabilité cherchée.

La ruine peut avoir lieu à la $m^{\text{ième}}$ partie, à la $(m+2)^{\text{ième}}$ partie, etc. Si la différence entre μ et m est paire on a

$$P_{\mu,m} = 2\,\mathfrak{P}_{\mu+1,m+1}.$$

En effet, la perte m ne peut être dépassée à la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ partie sans que la perte m ait été atteinte dans les μ premières parties; la probabilité $\mathfrak{P}_{\mu+1,m+1}$ est donc égale à la probabilité $P_{\mu,m}$ multipliée par la probabilité pour que, la perte m ayant été atteinte avant μ parties ou en μ parties soit dépassée à la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire multipliée par $\frac{1}{2}$, on a donc

$$\mathfrak{P}_{\mu+1,m+1} = P_{\mu,m} \times \frac{1}{2},$$

d'où

$$P_{\mu,m} = 2\mathfrak{P}_{\mu+1,m+1} = 2[\varpi_{\mu+1,m+1} + \varpi_{\mu+1,m+3} + \ldots + \varpi_{\mu+1,\mu+1}].$$

Cette formule peut servir à calculer $P_{\mu,m}$.

138. Il est préférable d'exprimer la probabilité $P_{\mu,m}$ en fonction des probabilités ϖ relatives à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

On a évidemment

$$\varpi_{\mu+1,i} = \frac{1}{2}\varpi_{\mu,i-1} + \frac{1}{2}\varpi_{\mu,i+1},$$

car, si la perte est i à la $(\mu+1)^{\text{e}}$ partie, elle a certainement été $i-1$ ou $i+1$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Si l'on transforme la valeur de $P_{\mu,m}$ d'après cette formule, on obtient

$$P_{\mu,m} = \varpi_{\mu,m} + 2(\varpi_{\mu,m+2} + \varpi_{\mu,m+4} + \ldots + \varpi_{\mu,\mu}),$$

ou encore

$$P_{\mu,m} = \varpi_{\mu,m} + 2\mathfrak{P}_{\mu,m+2}.$$

Si la différence entre μ et m est paire, la ruine ne pouvant avoir lieu à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la probabilité pour que la ruine ait lieu avant μ parties est $P_{\mu-1,m}$.

139. Si μ tend vers l'infini, $\varpi_{\mu m}$ tend vers zéro et $\mathfrak{P}_{\mu,m+2}$ vers $\frac{1}{2}$; alors $P_{\mu,m}$ tend vers un.

Si donc le joueur ne se fixe pas un nombre maximum de parties, sa ruine est certaine.

140. Cherchons maintenant la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ pour que la ruine ait lieu précisément à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire pour qu'elle ait lieu à cette $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte totale de m francs n'ayant jamais été

atteinte auparavant. On a

$$\Pi_{\mu,m} = P_{\mu,m} - P_{\mu-2,m}.$$

Or, d'après la formule du n° 138,

$$P_{\mu,m} = \varpi_{\mu,m} + 2[\varpi_{\mu,m+2} + \varpi_{\mu,m+4} + \ldots],$$

et, d'après la formule du n° 137,

$$P_{\mu-2,m} = 2[\varpi_{\mu-1,m+1} + \varpi_{\mu-1,m+3} + \ldots].$$

Comme d'ailleurs

$$\varpi_{\mu,i} = \frac{1}{2}\varpi_{\mu-1,i-1} + \frac{1}{2}\varpi_{\mu-1,i+1},$$

on peut écrire

$$P_{\mu-2,m} = \varpi_{\mu-1,m+1} + 2[\varpi_{\mu,m+2} + \varpi_{\mu,m+4} + \ldots],$$

et par suite

$$P_{\mu,m} - P_{\mu-2,m} = \varpi_{\mu,m} - \varpi_{\mu-1,m+1}$$

ou

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu}\,\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} = \frac{m}{\mu}\varpi_{\mu,m}.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que la ruine ait lieu à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

141. La probabilité $P_{\mu,m}$ pour que la ruine ait lieu en μ parties s'obtient en sommant toutes les valeurs de $\Pi_{\mu m}$ de m à μ.

$$P_{\mu,m} = \sum_{\mu=m}^{\mu=\mu} \frac{m}{\mu}\varpi_{\mu,m},$$

les valeurs successives de μ étant m, $m+2$, $m+4, \ldots$

On peut écrire, en posant $\mu = m + 2h$,

$$P_{\mu,m} = \left(\frac{1}{2}\right)^m \Bigg[1 + \frac{m}{4} + \frac{m(m+3)}{1.2.4^2} + \frac{m(m+4)(m+5)}{1.2.3.4^3} + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)}{1.2.3.4.4^4} + \ldots + \frac{m(m+h+1)(m+h+2)\ldots(m+2h-1)}{h!\,4^h}\Bigg].$$

Cette formule apparemment différente de celle du n° 138 se compose comme elle de $\frac{\mu - m}{2}$ termes.

142. Distribution des probabilités. — Pour résoudre d'une façon complète le problème que nous nous sommes proposé, il faut déterminer les probabilités relatives à tous les cas possibles, c'est-à-dire la distribution des probabilités.

Nous connaissons les probabilités relatives aux cas où le joueur est ruiné, il nous reste à chercher les probabilités relatives aux cas où le joueur n'est pas ruiné.

Si le joueur n'est pas ruiné à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, il peut perdre $(m-2)$ francs, $(m-4)$ francs, ... où il peut gagner 1 fr, 3 fr, ... si μ est impair; 2 fr, 4 fr, ... si μ est pair.

Nous allons déterminer la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur perde la somme $m-y$ (qui est un gain si y est supérieur à m), ce joueur n'ayant pas antérieurement perdu la somme m.

Si le joueur A avait une fortune infinie, la probabilité cherchée aurait pour valeur $\varpi_{\mu,m-y}$: la possibilité de la ruine de ce joueur diminue cette probabilité d'une quantité que nous allons déterminer.

Si le joueur, lorsqu'il est ruiné pouvait continuer à jouer, il y aurait par suite de la symétrie de la probabilité, autant de chances pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, il ait perdu y francs que de chances pour qu'il les ait gagnés; dans le premier cas la perte serait $m+y$ et dans le second cas elle serait $m-y$.

La possibilité de la ruine du joueur supprime donc en même temps que la probabilité de la perte $m+y$ une probabilité égale pour la perte $m-y$.

La probabilité pour que, en μ parties, la perte du joueur soit $m-y$ est donc

$$\varpi_{\mu,m-y} - \varpi_{\mu,m+y}.$$

143. De la formule précédente il est facile de déduire la probabilité de ruine $\Pi_{\mu,m}$. En effet, pour que le joueur soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, il faut que sa perte soit $(m-1)$ à la $(\mu-1)^{\text{ième}}$ partie, cette perte n'ayant pas précédemment atteint la valeur m; il faut ensuite que le joueur perde la $\mu^{\text{ième}}$ partie. A la première condition cor-

respond la probabilité $(\varpi_{\mu-1,m-1} - \varpi_{\mu-1,m+1})$ et à la seconde condition la probabilité $\frac{1}{2}$; on a donc

$$u_{\mu,m} = \frac{1}{2}(\varpi_{\mu-1,m-1} - \varpi_{\mu-1,m+1}) = \frac{m}{\mu}\,\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} = \frac{m}{\mu}\varpi_{\mu,m}.$$

144. **Principe général relatif au cas où les enjeux sont égaux.** — Le joueur A ayant pour chaque partie probabilité p de gagner 1 fr et probabilité q de perdre 1 fr, quelle est, dans des conditions données, la probabilité pour que, en μ parties, il perde m francs.

Si le joueur a perdu m francs en μ parties, c'est qu'il a gagné $\frac{\mu-m}{2}$ parties et perdu $\frac{\mu+m}{2}$ parties. La probabilité pour que ces gains et ces pertes se soient succédé dans un ordre donné est

$$p^{\frac{\mu-m}{2}}\,q^{\frac{\mu+m}{2}};$$

la probabilité pour que ces gains et ces pertes se succèdent en suivant une loi déterminée sera

$$k\,p^{\frac{\mu-m}{2}}\,q^{\frac{\mu+m}{2}},$$

k désignant le nombre des successions de gains et de pertes qui satisfont à la loi donnée.

k est un coefficient indépendant de p et de q, et, si on peut le déterminer lorsque p égale q, on connaîtra par ce même fait la probabilité lorsque p diffèrera de q.

La connaissance des probabilités lorsque le jeu est symétrique a pour conséquence immédiate la connaissance des probabilités lorsque le jeu est dissymétrique.

On suppose que deux alternatives sont seules possibles à chaque partie.

145. Reprenons à titre d'exemple le premier problème de la théorie du jeu : Le joueur A ayant à chaque partie probabilité p de gagner un franc et probabilité q de perdre 1 fr, quelle est la probabilité pour que sa perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie?

La probabilité cherchée est nécessairement de la forme $kp^{\frac{\mu-m}{2}}q^{\frac{\mu+m}{2}}$ et elle se réduit à $k\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}$ lorsque $p=q=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire lorsque le jeu est symétrique.

Supposons que par un procédé quelconque nous soyons arrivés à obtenir l'expression de la probabilité cherchée lorsque le jeu est symétrique.

$$\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}.$$

La quantité k étant alors connue, nous pourrons écrire immédiatement l'expression de la probabilité cherchée dans le cas général

$$\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}p^{\frac{\mu-m}{2}}q^{\frac{\mu+m}{2}}.$$

146. **Étude de la probabilité.** — *Le joueur A ayant, pour chaque partie, probabilité p de gagner 1 fr et probabilité q de perdre 1 fr, quelle est la probabilité pour qu'il perde ses m francs après avoir joué μ parties, de telle sorte que la μ^ième partie lui enlève son dernier franc?*

La probabilité de la ruine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie lorsque $p=q$ a pour expression (n° 140)

$$\Pi_{\mu,m}=\frac{m}{\mu}\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}.$$

La probabilité de la ruine dans le cas où p diffère de q est donc (n° 144)

$$\Pi_{\mu,m}=\frac{m}{\mu}\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}p^{\frac{\mu-m}{2}}q^{\frac{\mu+m}{2}}.$$

147. La probabilité pour que la perte soit m en jouant μ parties, cette perte ayant pu être quelconque avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, a pour valeur

$$\varpi_{\mu,m}=\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}p^{\frac{\mu-m}{2}}q^{\frac{\mu+m}{2}};$$

on a donc

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu}\varpi_{\mu,m},$$

comme dans le cas où $p = q$.

148. La probabilité $P_{\mu,m}$ pour que la ruine se produise en jouant au maximum μ parties a pour valeur

$$P_{\mu,m} = \sum_{\mu=m}^{\mu=\mu} \Pi_{\mu,m},$$

le Σ étant relatif aux valeurs m, $m+2$, $m+4$, ... puisque la ruine ne peut avoir lieu que de deux en deux parties.

Si l'on pose $\mu = m + 2h$, on peut ainsi écrire l'expression de $P_{\mu,m}$

$$P_{\mu,m} = q^m \Big[1 + mpq + \frac{m(m+3)}{1.2} p^2 q^2 + \frac{m(m+4)(m+5)}{1.2.3} p^3 q^3 + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)}{1.2.3.4} p^4 q^4 + \ldots + \frac{m(m+h+1)(m+h+2)\ldots(m+2h-1)}{1.2.3.4\ldots h} p^h q^h \Big].$$

149. Cette expression de $P_{\mu,m}$ résulte de la généralisation de la formule du n° 141. La généralisation de la formule du n° 138 donnerait

$$\begin{aligned} P_{\mu,m} = {} & \frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!} p^{\frac{\mu-m}{2}} q^{\frac{\mu+m}{2}} \\ & + \frac{\mu!}{\left(\frac{\mu-m}{2}-1\right)!\left(\frac{\mu+m}{2}+1\right)!}\left[p^{\frac{\mu-m}{2}-1} q^{\frac{\mu+m}{2}+1} + p^{\frac{\mu-m}{2}+1} q^{\frac{\mu+m}{2}-1}\right] \\ & + \frac{\mu!}{\left(\frac{\mu-m}{2}-2\right)!\left(\frac{\mu+m}{2}+2\right)!}\left[p^{\frac{\mu-m}{2}-2} q^{\frac{\mu+m}{2}+2} + p^{\frac{\mu-m}{2}+2} q^{\frac{\mu+m}{2}-2}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [q^\mu + p^{\mu-m} q^m]. \end{aligned}$$

Cette expression n'a pas, comme la précédente, l'avantage de faire connaître la probabilité de ruine relative à chaque partie : elle donne uniquement la somme $P_{\mu,m}$ de ces probabilités. Par contre, elle doit

être employée quand on désire calculer la distribution des probabilités (nº 154) et l'espérance mathématique (nº 157) du jeu.

150. Lorsque aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, la ruine est certaine si le jeu est équitable (nº 139) et à plus forte raison s'il est désavantageux.

Il n'en est pas de même lorsque le jeu présente un avantage, si faible soit-il. Dans ce cas d'ailleurs on peut déterminer la probabilité totale de ruine sans effectuer aucune sommation.

Désignons par f_m la probabilité totale de ruine du joueur qui possède m francs. Ce joueur ne peut perdre m francs sans perdre d'abord un franc, puis un autre, puis un troisième, etc.

La probabilité de sa ruine quand il possède m francs est donc f_1^m, d'après le principe des probabilités composées.

Il reste à calculer f_1. Supposons que le joueur ne possède qu'un franc; en jouant une partie, il a probabilité q de perdre son unique franc et probabilité p de posséder deux francs; on a donc

$$f_1 = q + pf_2 = q + pf_1^2,$$

d'où

$$f_1 = \frac{q}{p}$$

et par suite

$$f_m = \left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

151. La probabilité de ruine peut être obtenue par la théorie des équations aux différences finies. En désignant par y_x cette probabilité quand le joueur A possède x francs, on a

$$y_x = py_{x+1} + qy_{x-1}.$$

La quantité y doit de plus satisfaire aux conditions

$$y_0 = 1, \qquad y_\infty = 0.$$

L'intégration de l'équation par la méthode connue (nº 132) conduit aux mêmes résultats que précédemment.

152. On voit que si le jeu est avantageux, non seulement la proba-

bilité de ruine ne tend pas vers l'unité, mais que même elle est très faible si la quantité m est suffisamment grande.

Supposons, par exemple, que $p = 0,51$, $q = 0,49$. m étant égal à 100; la probabilité de ruine

$$\left(\frac{49}{51}\right)^{100} = 0,018$$

est comme on voit très faible.

Cet exemple montre combien le moindre avantage change les conditions de réussite d'un jeu.

153. La probabilité totale de ruine lorsque aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu peut être facilement obtenue même en supposant que les conditions du jeu varient avec la perte du joueur.

Les enjeux étant toujours égaux à l'unité, supposons que les probabilités soient p_1 et q_1 jusqu'à ce que le joueur ait subi la perte totale de 1 fr, puis qu'elles soient p_2 et q_2 jusqu'à ce que le joueur ait perdu en totalité 2 fr, puis qu'elles soient p_3 et q_3, etc.

Le joueur ne pouvant être ruiné sans avoir subi la perte totale de 1 fr, puis de 2 fr, puis de 3 fr, etc., la probabilité de ruine est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{q_1}{p_1} \frac{q_2}{p_2} \frac{q_3}{p_3} \cdots$$

154. **Distribution des probabilités.** — Le problème de la distribution de la probabilité consiste à étudier les probabilités relatives à tous les cas qui peuvent se présenter; la formule du n° 146 résout la question pour les cas où le joueur est ruiné; il nous reste à étudier les cas où le joueur n'est pas ruiné.

Nous allons donc chercher la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur ait perdu la somme $m - y$ (qui est un gain si y est supérieur à m).

Si p était égal à q, la probabilité serait (n° 142)

$$\varpi_{\mu, m-y} - \varpi_{\mu, m+y},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu!}{\frac{\mu-m+y}{2}!\,\frac{\mu+m-y}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}-\frac{\mu!}{\frac{\mu-m-y}{2}!\,\frac{\mu+m+y}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}.$$

Si maintenant on suppose p différent de q les coefficients ne changent pas (n° 144) et puisque le joueur a finalement perdu $m-y$ francs en μ parties, les quantités $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}$ doivent être remplacées par

$$p^{\frac{\mu-m+y}{2}}\,q^{\frac{\mu+m-y}{2}},$$

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur ait perdu la somme $m-y$ est donc

$$\left[\frac{\mu!}{\frac{\mu-m+y}{2}!\,\frac{\mu+m-y}{2}!}-\frac{\mu!}{\frac{\mu-m-y}{2}!\,\frac{\mu+m+y}{2}!}\right]p^{\frac{\mu-m+y}{2}}\,q^{\frac{\mu+m-y}{2}}.$$

Cette quantité peut encore s'écrire

$$\varpi_{\mu,m-y}-\varpi_{\mu,m+y}\left(\frac{p}{q}\right)^{y}.$$

155. On peut démontrer directement cette dernière formule sans qu'il soit nécessaire de connaître l'expression des probabilités ϖ.

Si le joueur A avait une fortune infinie, la probabilité cherchée serait $\varpi_{\mu,m-y}$; nous devons retrancher de cette quantité les probabilités relatives aux cas où le joueur A, d'abord ruiné, aurait ensuite gagné la somme y s'il avait pu continuer à jouer jusqu'à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Si le joueur A lorsqu'il est ruiné pouvait continuer à jouer, la probabilité pour que, dans les parties suivantes, il gagne y francs, est à la probabilité pour qu'il perde y francs dans le rapport de p^y à q^y.

En effet, aux alternatives de gain et de perte qui produisent finalement le gain y correspondent une à une les alternatives de perte et de gain qui produisent finalement la perte y. Soit x le nombre des pertes pour une des premières suites d'alternatives, le nombre des gains sera $y+x$. Dans la seconde suite correspondante, le nombre des pertes sera $y+x$ et le nombre des gains sera x.

Le rapport des probabilités est donc

$$\frac{p^{x+y}q^x}{q^{x+y}p^x} = \frac{p^y}{q^y};$$

il est indépendant de x. On a donc quel que soit μ

$$\varpi_{\mu,-y} = \left(\frac{p}{q}\right)^y \varpi_{\mu,y}.$$

Si le joueur A lorsqu'il est ruiné pouvait continuer à jouer, la probabilité pour qu'il perde y francs (ce qui porterait sa perte totale à $m+y$ francs) est à la probabilité pour qu'il gagne y francs (et par suite pour que sa perte soit réduite à $m-y$ francs) dans le rapport de q^y à p^y.

La possibilité de la ruine du joueur A diminue donc la probabilité $\varpi_{\mu,m-y}$ de la quantité

$$\left(\frac{p}{q}\right)^y \varpi_{\mu,m+y}.$$

156. Des probabilités relatives aux cas où le joueur n'est pas ruiné, on déduit facilement les probabilités de ruine.

Pour que le joueur se ruine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, il faut que, à la $(\mu-1)^{\text{ième}}$ partie, il ne soit pas ruiné et qu'il ait perdu $(m-1)$ francs; la probabilité de cette éventualité est, d'après la formule du n° 154,

$$\varpi_{\mu-1,m-1} - \frac{p}{q}\varpi_{\mu-1,m+1}.$$

Il faut ensuite que le joueur perde la $\mu^{\text{ième}}$ partie, éventualité qui a pour probabilité q. On a donc

$$\Pi_{\mu,m} = q\left(\varpi_{\mu-1,m-1} - \frac{p}{q}\varpi_{\mu-1,m+1}\right) = \frac{m}{\mu}\,\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}\,p^{\frac{\mu-m}{2}}\,q^{\frac{\mu+m}{2}} = \frac{m}{\mu}\varpi_{\mu,m}.$$

157. **Étude de l'espérance mathématique.** — Si le jeu peut durer indéfiniment, l'espérance totale du joueur qui a une fortune limitée m est infinie si le jeu le favorise, elle est négative et égale à $-m$ si le jeu le défavorise. Lorsque le jeu est équitable les espérances positive et négative ont pour valeur m (n° 139).

Lorsque le nombre des parties est limité, l'espérance mathématique

se calcule facilement dès que la distribution de la probabilité est connue; l'espérance négative est la somme de la quantité $-m\mathrm{P}_{\mu,m}$ qui correspond à la ruine totale et des espérances pour que, si le jeu n'est pas terminé en μ parties, le joueur ait perdu $m-2$ fr, $m-4$ fr, etc. L'espérance positive est la somme des espérances correspondant aux gains de μ francs, de $\mu-2$ fr, etc.

158. **Durée moyenne du jeu.** — Soit $\varphi(m)$ la durée moyenne du jeu, c'est-à-dire l'espérance mathématique d'un joueur B qui devrait recevoir 1 fr par partie jouée; cherchons quelle est la durée $\varphi(m+m')$ dans le cas où la fortune du joueur est $m+m'$.

Pour perdre la somme $m+m'$, le joueur doit d'abord perdre la somme m. Au moment où il a perdu cette somme, la durée moyenne relative à la nouvelle perte m' est $\varphi(m')$.

La durée moyenne relative à la somme $m+m'$ s'obtiendra donc en ajoutant $\varphi(m')$ à $\varphi(m)$.

On a donc

$$\varphi(m+m')=\varphi(m)+\varphi(m'),$$

d'où

$$\varphi(m)=\mathrm{C}m.$$

Pour déterminer la constante C, supposons que le joueur possède uniquement 1 fr, alors $m=1$ et $\varphi(m)=\mathrm{C}$.

On peut calculer autrement $\varphi(m)$ pour $m=1$. En jouant une partie, il y a probabilité q pour que le jeu se termine et probabilité p pour que le joueur gagne et qu'il possède 2 fr; la durée moyenne, après la première partie, serait $2\mathrm{C}$ dans cette hypothèse.

On a donc, en égalant les deux expressions de la durée moyenne

$$\mathrm{C}=q+p[1+2\mathrm{C}],$$

d'où

$$\mathrm{C}=\frac{1}{q-p}.$$

La durée moyenne du jeu est donc

$$\frac{m}{q-p}.$$

159. La durée moyenne du jeu est infinie lorsque $p=q$ et à plus

forte raison lorsque le jeu est avantageux, car alors la probabilité pour que le jeu dure indéfiniment est finie et a pour valeur

$$1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

160. La valeur de la durée moyenne du jeu peut être facilement obtenue même en supposant que les conditions du jeu varient avec la perte du joueur.

Les enjeux étant toujours égaux à l'unité, supposons que les probabilités soient p_1 et q_1 jusqu'à ce que le joueur ait subi la perte totale de 1 fr, puis qu'elles soient p_2 et q_2 jusqu'à ce que le joueur ait perdu en totalité 2 fr, puis qu'elles soient p_3 et q_3, etc.

Le joueur ne pouvant être ruiné sans avoir d'abord perdu en totalité un franc, puis un autre, puis un troisième, etc., la durée moyenne du jeu est

$$\frac{1}{q_1 - p_1} + \frac{1}{q_2 - p_2} + \frac{1}{q_3 - p_3} + \ldots$$

161. **Cas où les enjeux sont inégaux.** — *Un joueur A possède m francs; il a, pour chaque partie, la probabilité p de gagner la somme α et la probabilité $q = 1 - p$ de perdre la somme β; quelle est la probabilité pour qu'il soit ruiné précisément à la $\mu^{\text{ième}}$ partie?*

Nous ne pouvons supposer les données quelconques; la quantité m doit être, en effet, un multiple de β. Si le joueur A perd sans interruption depuis le début du jeu, et si m n'est pas un multiple de β, il arrivera un moment où le joueur sera forcé de cesser de jouer sans avoir perdu ses m francs, possédant encore une somme inférieure à son enjeu. Donc m doit être un multiple de β.

Supposons qu'il en soit ainsi; le joueur A ne peut être ruiné avant la partie d'ordre $\frac{m}{\beta}$; s'il n'est pas ruiné à cette partie, il possède au moins la somme $\alpha + \beta$. Admettons qu'il possède cette somme; ne pouvant perdre que β par partie, le joueur ne pourra être ruiné qu'après $\frac{\alpha + \beta}{\beta}$ parties; ce nombre doit être entier, donc α doit être un multiple de β. La quantité μ doit évidemment être de la forme $\frac{m + k(\alpha + \beta)}{\beta}$, k

étant un entier, autrement, la probabilité de ruine à la partie d'ordre μ est nulle.

En résumé : l'énoncé du problème suppose que α et m soient des multiples de β.

S'il en était autrement, l'expression de probabilité de ruine n'aurait plus un sens précis, il faudrait lui substituer l'expression : probabilité de la terminaison du jeu. Cette probabilité pourrait se calculer, du moins en théorie, en étudiant de proche en proche les parties jouées, en commençant par la première. Si m est suffisamment grand par rapport à β, les formules des probabilités continues qui seront obtenues plus loin feront connaître cette probabilité avec une grande approximation.

Nous supposerons que α et m sont des multiples de l'enjeu β.

162. Si le joueur a perdu m francs en μ parties, c'est qu'il a gagné $\frac{\beta\mu - m}{\alpha + \beta}$ parties et perdu $\frac{\alpha\mu + m}{\alpha + \beta}$ parties. La probabilité de gain étant p, la probabilité pour que cet événement se produise $\frac{\beta\mu - m}{\alpha + \beta}$ fois en μ épreuves (n° 12) est

$$\varpi_{\mu,m} = \frac{\mu!}{\frac{\beta\mu - m}{\alpha + \beta}!\,\frac{\alpha\mu + m}{\alpha + \beta}!}\, p^{\frac{\beta\mu - m}{\alpha - \beta}}\, q^{\frac{\alpha\mu + m}{\alpha + \beta}}.$$

Cette probabilité est plus grande que celle que nous cherchons; elle est relative à toutes les séries de parties amenant la ruine du joueur A en μ parties. Nous devons en retrancher celles qui auraient amené cette ruine avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Nous allons donc chercher, parmi les séries qui auraient produit la perte m en μ parties, celles qui auraient produit cette perte avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Considérons une série qui aurait produit la ruine en γ parties; cette série, si elle avait pu se continuer, se serait composée, après la $\mu^{\text{ième}}$ partie, de $\frac{\beta(\mu - \gamma)}{\alpha + \beta}$ parties gagnées et de $\frac{\alpha(\mu - \gamma)}{\alpha + \beta}$ parties perdues, puisque la perte totale aurait été égale à m. Quel que soit γ, le rapport du nombre des parties gagnées au nombre des parties perdues est toujours $\frac{\beta}{\alpha}$.

A partir de la $\gamma^{\text{ième}}$ partie, il se produit une suite de pertes et de gains que l'on peut représenter symboliquement comme suit :

$$G_1 G_2 P_1 \ldots G_{\frac{\beta(\mu-\gamma)}{\alpha+\beta}} \ldots P_{\frac{\alpha(\mu-\gamma)}{\alpha+\beta}};$$

G_1 indique que la $(\gamma+1)^{\text{ième}}$ partie a donné un gain, G_2 indique que la partie suivante a donné un gain, P_1 signifie que la partie suivante a donné une perte, etc.

Considérons une suite quelconque

$$GP \ldots.$$

C'est une permutation quelconque qui contient, comme nous l'avons vu, des nombres de lettres G et de lettres P proportionnels à β et α. Donc le nombre de ces permutations qui se terminent par P est au nombre des permutations qui se terminent par G dans le rapport de α à β.

Donc, le nombre total de ces permutations est égal au nombre de celles qui se terminent par G multiplié par $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$.

Si la dernière lettre est G, c'est que la dernière partie a été un gain; or, pour que la $\mu^{\text{ième}}$ partie fournisse un gain, il faut que la perte soit $(m+\alpha)$ à la $(\mu-1)^{\text{ième}}$ partie.

Donc :

Le nombre des séries qui auraient produit la perte en moins de μ parties est égal au produit par $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ du nombre des séries qui, produisant la perte $(m+\alpha)$ en $(\mu-1)$ parties produiraient la perte m en μ parties.

Passant du nombre des séries aux probabilités, nous pouvons dire que la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ est égale à la probabilité $\varpi_{\mu,m}$ diminuée du produit par $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ de la probabilité pour que la perte étant $(m+\alpha)$ en $(\mu-1)$ parties soit égale à m en μ parties, c'est-à-dire diminuée de $p\frac{\alpha+\beta}{\beta}\varpi_{\mu-1,m+\alpha}$. On a donc :

$$\Pi_{\mu,m} = \varpi_{\mu,m} - p\frac{\alpha+\beta}{\beta}\varpi_{\mu-1,m+\alpha}.$$

Si, dans la formule précédente, on remplace $\varpi_{\mu-1,m+\alpha}$ par sa valeur,

on obtient

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu\beta} \varpi_{\mu,m}.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que le joueur soit ruiné précisément à la $\mu^{\text{ième}}$ *partie.*

α et m étant des multiples de β, nous supposerons que $\beta = 1$; la formule s'écrira alors

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu} \varpi_{\mu,m}.$$

163. La probabilité pour que la ruine se produise en jouant au maximum μ parties est

$$\sum_{\mu=m}^{\mu=\mu} \Pi_{\mu,m};$$

l'indice inférieur prend les valeurs successives m, $m+\alpha+1$, $m+2\alpha+2, \ldots$.

164. Cherchons maintenant la probabilité pour que le joueur A ait perdu la somme $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie. S'il possédait une fortune infinie la probabilité serait $\varpi_{\mu,m-y}$; il faut déduire de cette quantité les probabilités relatives aux cas où le joueur A supposé ruiné aurait ensuite gagné la somme y s'il avait pu continuer à jouer. Il faut donc déduire de $\varpi_{\mu,m-y}$ la somme

$$\sum \Pi_{\mu_1,m} \varpi_{\mu-\mu_1,-y}$$

qui s'étend aux valeurs m, $(m+\alpha+1)$, $(m+2\alpha+2), \ldots \left(\mu - \frac{y}{\alpha}\right)$ de μ_1.

165. Lorque aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, on peut calculer la probabilité totale de ruine sans effectuer aucune sommation.

Le raisonnement précédemment employé (n° 150) subsiste intégralement; l'expression de la probabilité est de la forme f_1^m.

Il reste à déterminer f_1. Supposons que le joueur ne possède que 1 fr; en jouant une partie, il a probabilité q de perdre son unique

franc et probabilité p de posséder $\alpha + 1$ fr; on a donc

$$f_1 = q + pf_{\alpha+1} = q + pf_1^{\alpha+1}.$$

Donc la probabilité cherchée a pour valeur f_1^m, la quantité f_1 étant la racine positive de l'équation

$$f_1 = q + pf_1^{\alpha+1};$$

cette équation admet toujours l'unité pour racine, c'est l'autre racine positive qui convient.

Lorsque le jeu est équitable, $\alpha p - q = 0$ l'équation admet pour racine double l'unité : la ruine est donc certaine.

Il en est de même à plus forte raison quand le jeu est désavantageux.

166. La théorie des équations aux différences finies conduit au même résultat.

En désignant par y_x la probabilité de ruine du joueur A quand il possède x francs, on a

$$y_x = qy_{x-1} + py_{x+\alpha}.$$

Pour intégrer cette équation on pose (n° 132)

$$y_x = v^x;$$

elle devient

$$v^x = qv^{x-1} + pv^{x+\alpha}$$

ou

$$v = q + pv^{\alpha+1}.$$

La probabilité cherchée est donc v^m, la quantité v satisfaisant à l'équation

$$v = q + pv^{\alpha+1};$$

c'est le résultat que nous avons obtenu. Les deux méthodes ne diffèrent du reste que par la forme.

167. La probabilité totale de ruine lorsque aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu peut être facilement obtenue même en supposant que les conditions du jeu varient avec la perte du joueur.

Supposons que le jeu soit défini par les quantités p_1, q_1, α_1 jusqu'à ce que le joueur ait perdu en totalité 1 fr; par les quantités p_2,

q_2, α_2 jusqu'à ce que le joueur ait perdu en totalité 2 fr, etc. Le joueur ne pouvant être ruiné sans avoir subi la perte totale de 1 fr, puis de 2 fr, etc., la probabilité de ruine est, en vertu du principe des probabilités composées

$$f_1 \psi_1 \varphi_1 \ldots,$$

les quantités f_1, ψ_1, $\varphi_1 \ldots$ étant les racines positives des équations

$$f_1 = q_1 + p_1 f_1^{\alpha_1+1},$$
$$\psi_1 = q_2 + p_2 \psi_1^{\alpha_2+1},$$
$$\varphi_1 = q_3 + p_3 \varphi_1^{\alpha_3+1}.$$

168. **Durée moyenne du jeu.** — Le raisonnement précédemment employé (n° 158) subsiste intégralement, la durée moyenne a pour valeur Cm.

Pour déterminer la constante C, supposons que le joueur possède uniquement 1 fr, alors la durée moyenne est C.

En jouant une partie, il y a probabilité q pour que le jeu prenne fin à cette partie et probabilité p pour que le joueur possède la somme $\alpha + 1$. Dans ce cas, la durée moyenne après la première partie est $C(\alpha + 1)$. On a donc, en égalant les deux expressions de la durée moyenne,

$$C = q + p[1 + C(\alpha + 1)],$$

d'où

$$C = \frac{1}{q - \alpha p}.$$

La durée moyenne du jeu quand le joueur possède m francs est donc

$$\frac{m}{q - \alpha p}.$$

169. Supposons que le jeu soit défini par les quantités p_1, q_1, α_1 jusqu'à ce que le joueur ait perdu en totalité 1 fr, par les quantités p_2, q_2, α_2 jusqu'à ce que le joueur ait perdu en totalité 2 fr, etc. Le joueur ne peut se ruiner sans perdre un franc, puis un second, puis un troisième, etc. La durée moyenne du jeu est donc

$$\frac{1}{q_1 - \alpha_1 p_1} + \frac{1}{q_2 - \alpha_2 p_2} + \frac{1}{q_3 - \alpha_3 p_3} + \ldots.$$

170. Cas de trois alternatives. — *A chaque partie le joueur A qui possède m francs a probabilité p pour gagner 1 fr, probabilité q pour perdre 1 fr et probabilité $r = 1 - p - q$ pour faire partie nulle; quelle est la probabilité pour qu'il soit ruiné précisément à la μ^{ieme} partie?*

Soit $\Pi_{\mu,m}$ la probabilité cherchée; nous allons comparer cette quantité à $\varpi_{\mu,m}$ (n° 54).

Supposons que la perte soit m à la μ^{ieme} partie et que le nombre des parties nulles soit k; il y a dans ces conditions $\frac{\mu - m - k}{2}$ parties gagnées et $\frac{\mu + m - k}{2}$ parties perdues. Une des alternatives de gains, de pertes et de parties nulles peut se représenter par la suite.

$$(1) \qquad P_1, \quad R_2, \quad P_3, \quad Q_4, \quad \ldots, \quad P_\mu,$$

P_1 indique que la première partie a donné un gain, R_2 que la seconde partie a été nulle, P_3 indique que la troisième partie a donné un gain, Q_4 que la quatrième a donné une perte, etc.

Le nombre des permutations est celui de μ lettres dont k lettres R, $\frac{\mu - m - k}{2}$ lettres P et $\frac{\mu + m - k}{2}$ lettres Q, c'est-à-dire

$$N = \frac{\mu!}{\frac{\mu - k - m}{2}!\, k!\, \frac{\mu - k + m}{2}!}.$$

C'est le nombre des cas favorables de la probabilité $\varpi_{\mu,m}$ dans l'hypothèse où le nombre des parties nulles est k.

Cherchons maintenant le nombre des cas favorables de la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ dans les mêmes conditions. Il faut pour l'obtenir retrancher du nombre total N des permutations : 1° les permutations qui se terminent par R, car elles auraient produit la ruine du joueur à la $(\mu - 1)^{\text{ieme}}$ partie (ou antérieurement); leur nombre est $\frac{kN}{\mu}$; 2° les permutations qui se terminent par P, car elles auraient produit la ruine du joueur avant la $(\mu - 1)^{\text{ieme}}$ partie; leur nombre est $\frac{\mu - m - k}{2\mu} N$; 3° les permutations qui se terminent par Q, mais qui sont telles que, en les lisant de droite à gauche, le nombre des lettres P soit, à un instant quelconque de la lecture, égal au nombre des lettres Q.

Si en effet cette éventualité venait à se produire, ce serait que, à la partie correspondante ou à une partie antérieure, le joueur A aurait été ruiné.

Nous allons voir que le nombre des permutations de cette troisième sorte est égal au nombre des permutations de la seconde.

Considérons une permutation de la seconde sorte, par exemple

$$(2)\quad R_1,\quad P_2,\quad Q_3,\quad \ldots,\quad Q_\lambda \mid P_{\lambda+1},\quad R_{\lambda+2},\quad \ldots,\quad Q_{\mu-2},\quad R_{\mu-1},\quad P_\mu$$

Si on lit la permutation de droite à gauche, le nombre des lettres Q surpassant finalement celui des lettres P de la quantité m, il arrivera nécessairement un moment où les nombres des lettres P et Q seront égaux ; supposons que ce soit pour la valeur $\lambda + 1$ de l'indice.

Formons une permutation identique à la précédente jusqu'à la $\lambda^{\text{ième}}$ lettre et en quelque sorte symétrique pour les lettres suivantes, c'est-à-dire formée en remplaçant P par Q et Q par P.

$$(3)\quad R_1,\quad P_2,\quad Q_3,\quad \ldots,\quad Q_\lambda \mid Q_{\lambda+1},\quad R_{\lambda+2},\quad \ldots,\quad P_{\mu-2},\quad R_{\mu-1},\quad Q_\mu.$$

A chacune des permutations (2) correspond une permutation (3) et inversement. En lisant de droite à gauche, les permutations (2) commencent par P et les permutations (3) par Q et ces dernières sont telles que le nombre des lettres P devient à un certain moment égal au nombre des lettres Q. Les permutations de la troisième sorte sont donc en même nombre que celles de la seconde.

Le nombre des permutations favorables qui forment $\Pi_{\mu,m}$ et qui correspondent à la valeur particulière de k est donc

$$N - N\frac{k}{\mu} - N\frac{\mu-k-m}{2\mu} - N\frac{\mu-k-m}{2\mu} = \frac{m}{\mu}N.$$

Quelle que soit la valeur de k, le rapport du nombre des permutations qui forment la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ au nombre des permutations qui forment $\varpi_{\mu,m}$ est $\frac{m}{\mu}\cdot$ On a donc,

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu}\varpi_{\mu,m}.$$

Si l'on supposait plus généralement que le joueur A ait à chaque partie probabilité p pour gagner α francs (α est entier), probabilité q

pour perdre 1 fr et probabilité $r = 1 - p - q$ pour faire partie nulle, on aurait toujours

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu}\varpi_{\mu,m}.$$

$\Pi_{\mu,m}$ étant la probabilité de ruine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie et $\varpi_{\mu,m}$ la probabilité de la perte m à la même partie. La démonstration est analogue à la précédente et à celle du n° 162.

171. Revenons pour simplifier au cas où $\alpha = 1$.

La probabilité pour que la ruine ait lieu avant μ parties ou à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est

$$\sum_{\mu=m}^{\mu=\mu}\frac{m}{\mu}\varpi_{\mu,m}.$$

Le Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de μ.

Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, on peut obtenir la probabilité totale de ruine sans effectuer aucune sommation. Un raisonnement analogue à celui qui a déjà été employé (150) conduit à la valeur de cette probabilité

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

La probabilité de ruine est une certitude si le jeu est équitable et à plus forte raison s'il est désavantageux.

La durée moyenne se détermine comme précédemment (158); sa valeur est $\frac{m}{q-p}$.

La probabilité pour que le joueur perde la somme $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est exprimée par la formule

$$\varpi_{\mu,m-y} - \left(\frac{p}{q}\right)^y\varpi_{\mu,m+y},$$

dont la démonstration est analogue à celle qui a été exposée au n° 155.

CHAPITRE V.

TROISIÈME PROBLÈME DE LA THÉORIE DU JEU.

172. Ce que nous appelons le *troisième problème de la théorie du jeu* consiste dans l'étude du cas où les joueurs ont tous deux des fortunes limitées.

Traitons d'abord un cas particulier très simple :

Le joueur A possède 1 fr, le joueur B possède 2 fr; ils jouent 1 fr par partie, le joueur A ayant probabilité p pour gagner et probabilité q pour perdre. Quels sont les résultats que fournit le calcul sur cette question? Pour que le jeu ne se termine pas il faut que le joueur A gagne la première partie, le joueur B la seconde, le joueur A la troisième, etc. La probabilité pour que le jeu ne soit pas terminé en μ parties est $p^{\frac{\mu}{2}} q^{\frac{\mu}{2}}$ ou $p^{\frac{\mu+1}{2}} q^{\frac{\mu-1}{2}}$ suivant que μ est pair ou impair.

Le joueur A peut perdre à la première partie, la probabilité de cette éventualité est q; il peut perdre à la troisième, la probabilité est q^2p; il peut perdre à la cinquième, la probabilité est q^3p^2, etc.

Le joueur B peut perdre à la seconde partie, la probabilité est p^2; à la quatrième, la probabilité est p^3q, etc.

173. La probabilité de perte du joueur A en n parties est

$$q + q^2p + q^3p^2 + \ldots + q^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} = \frac{q\left[1-(pq)^{\frac{n+1}{2}}\right]}{1-pq}.$$

Cette même probabilité pour un nombre infini de parties est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, cette somme est égale à $\frac{q}{1-pq}$.

La probabilité de perte du joueur B pour un nombre infini de parties est $\frac{p^2}{1-pq}$.

174. La durée moyenne du jeu est l'espérance mathématique d'un joueur B qui devrait recevoir 1 fr par partie jouée, cette durée moyenne est donc exprimée par la série

$$q \times 1 + p^2 \times 2 + q^2 p \times 3 + p^3 q \times 4 + \ldots$$

qui se décompose en une somme de progressions géométriques. La valeur de la série est

$$\frac{1+p}{1-pq}.$$

175. La valeur de la durée moyenne est la somme de deux termes, l'un

$$q \times 1 + q^2 p \times 3 + \ldots = \frac{q(1+pq)}{(1-pq)^2},$$

qui correspond à la ruine du joueur A, l'autre

$$p^2 \times 2 + p^3 q \times 4 + \ldots = \frac{2p^2}{(1-pq)^2},$$

qui correspond à la ruine du joueur B.

La durée moyenne relative au joueur A, c'est-à-dire la durée moyenne du jeu quand c'est le joueur A qui est ruiné s'obtient en divisant

$$\frac{q(1+pq)}{(1-pq)^2}$$

par la probabilité de ruine du joueur A, c'est-à-dire par $\frac{q}{1-pq}$.

Cette durée moyenne est donc

$$\frac{1+pq}{1-pq}.$$

La durée moyenne relative au joueur B est de même

$$\frac{2}{1-pq}.$$

176. **Cas où le nombre des parties peut être illimité.** — *Le*

joueur A possède m francs, le joueur B possède n francs, ils jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux ; quelle est, pour chaque joueur, la probabilité d'être ruiné?

Nous supposerons d'abord que les enjeux sont de 1 fr par partie, que le joueur A a probabilité p pour gagner une partie, et probabilité q pour perdre et que le jeu est avantageux pour ce joueur $(p > q)$.

Pour obtenir la probabilité X de la ruine du joueur A, on doit, des alternatives de gain et de perte qui le ruineraient si B avait une fortune infinie, retrancher celles qui, causant d'abord la ruine du joueur B, causeraient ensuite celle du joueur A si le jeu pouvait se continuer.

La probabilité cherchée X est donc la probabilité de ruine du joueur A en supposant n infini (nº 150), c'est-à-dire $\left(\frac{q}{p}\right)^m$ diminuée de la probabilité pour que, B étant ruiné d'abord, A le soit ensuite, c'est-à-dire diminuée de

$$(1-X)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}.$$

En effet, aucune limite n'étant assignée d'avance pour la durée du jeu, la probabilité pour que B soit ruiné avant A est la probabilité totale de ruine de B, c'est-à-dire $(1-X)$, et d'autre part, la probabilité de ruine du joueur A quand il possède $m+n$ francs est bien $\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}$.

On a donc

$$X = \left(\frac{q}{p}\right)^m - (1-X)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n},$$

d'où

$$X = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m\left[\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1\right]}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1}.$$

La probabilité de ruine du joueur B est

$$1 - X = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1}.$$

Nous avons supposé que le jeu avantageait le joueur A; s'il en était

autrement, les formules seraient les mêmes. Le joueur B serait en effet avantagé, et, en appliquant à son jeu le raisonnement qui a été employé précédemment pour le jeu de A, on aurait

$$1 - X = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^n \left[\left(\frac{p}{q}\right)^m - 1\right]}{\left(\frac{p}{q}\right)^{m+n} - 1} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1}.$$

177. Nous avons supposé les enjeux égaux; s'il n'en était pas ainsi, le jeu pourrait s'arrêter sans qu'aucun des joueurs soit ruiné, l'un d'eux possédant une somme inférieure à son enjeu.

L'hypothèse de l'égalité des mises est donc nécessaire pour que le problème de la probabilité de ruine ait un sens précis et par suite pour que sa solution soit rigoureuse.

178. Notre démonstration ne s'applique pas au cas où le jeu est équitable, mais les formules sont toujours exactes par raison de continuité. Par exemple, la probabilité de ruine du joueur B

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1}$$

prend la forme $\frac{0}{0}$ lorsque $\frac{q}{p} = 1$, c'est-à-dire lorsque le jeu est équitable. En appliquant à cette expression la règle connue, on obtient sa valeur

$$\frac{m}{m+n}.$$

La probabilité de ruine du joueur A est

$$\frac{n}{m+n}.$$

Lorsque le jeu est équitable, les probabilités de ruine sont inversement proportionnelles aux fortunes des joueurs. Ce résultat avait été obtenu par un raisonnement plus simple (n° 13).

179. On peut déterminer les probabilités par la théorie des équations aux différences finies.

Soit y_x la probabilité qu'a le joueur A d'être ruiné quand il possède x francs et quand, par suite, le joueur B possède $m+n-x$ francs. On a

$$y_x = p y_{x+1} + q y_{x-1};$$

c'est une équation linéaire à coefficients constants qui s'intègre par la méthode classique (n° 132). En remarquant qu'on doit avoir

$$y_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad y_{m+n} = 0,$$

on obtient le même résultat que précédemment.

180. Si le jeu est avantageux pour le joueur B, la probabilité de sa ruine

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1}$$

prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$ si m et n sont infinis, leur rapport restant fini. En appliquant à cette expression la règle connue, on voit que sa valeur est zéro. Donc, lorsque les fortunes des joueurs sont très grandes, celui que le jeu désavantage sera certainement ruiné.

181. Si les joueurs possèdent la même fortune, il est facile de calculer directement leurs probabilités de ruine. Si les joueurs possèdent la même somme m, leurs probabilités de ruine à une même partie quelconque sont proportionnelles à q^m et p^m.

En effet, les deux joueurs ayant la même fortune et les enjeux étant égaux, aux successions de perte et de gain qui peuvent ruiner l'un correspondent une à une les successions de perte et de gain qui peuvent ruiner l'autre. Soit x le nombre des gains dans une série, le nombre des pertes sera $m+x$; le rapport des probabilités de ruine des deux joueurs A et B pour la valeur considérée de x est donc

$$\frac{p^x q^{m+x}}{q^x p^{m+x}} = \frac{q^m}{p^m}.$$

Il est indépendant de x.

Donc, pour une même partie, quel que soit son rang, les probabilités de ruine des deux joueurs sont proportionnelles à q^m et p^m, q et p étant leur probabilité de perte pour une partie.

Les probabilités de ruine pour une même partie quelconque étant proportionnelles à q^m et p^m, les probabilités totales de ruine sont proportionnelles à ces mêmes quantités, et, comme leur somme est *un*, leur valeur respective est

$$\frac{q^m}{p^m+q^m}, \qquad \frac{p^m}{p^m+q^m}.$$

182. **Durée moyenne du jeu.** — La durée moyenne du jeu est l'espérance mathématique d'un joueur H qui devrait recevoir 1 fr par partie jouée.

Supposons d'abord que le jeu soit désavantageux pour le joueur A. Nous avons obtenu la formule

$$\frac{m}{q-p},$$

relative au cas où le joueur B possède une fortune infinie (n° 158); cette formule représente la somme de deux sortes de termes :

1° Ceux qui correspondent aux alternatives de gain et de perte du joueur A qui n'auraient pas ruiné le joueur B possédant n francs avant de ruiner le joueur A; ces termes ne changent pas par ce fait que la fortune du joueur B est limitée à n francs;

2° Ceux qui correspondent aux alternatives de gain et de perte du joueur A ruinant d'abord le joueur B possédant n francs.

Si le joueur B lorsqu'il est ruiné pouvait continuer à jouer, la durée moyenne du jeu serait $\frac{m+n}{q-p}$ puisque dans ces conditions le joueur A posséderait $m+n$ francs.

Soit U la probabilité de ruine du joueur B; la possibilité de la ruine de ce joueur diminue la durée moyenne de la quantité $U\frac{m+n}{q-p}\cdot$ La durée moyenne du jeu est donc

$$\frac{m}{q-p}-U\frac{m+n}{q-p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{m(1-U)-Un}{q-p}.$$

Cette formule ne changerait pas dans le cas où le jeu désavantagerait le joueur B.

$q-p$ est l'avantage du joueur B pour une partie, $m(1-U)$ est l'espérance positive de ce joueur, $-Un$ est son espérance négative, le numérateur est donc l'espérance totale ou avantage total; donc

Le nombre moyen des parties est égal au rapport de l'avantage total de l'un des joueurs à l'avantage du même joueur dans chaque partie.

183. On peut obtenir le même résultat par la théorie des équations aux différences finies.

Soit y_x la durée moyenne lorsque le joueur A possède x francs; on a

$$y_x = 1 + p\,y_{x+1} + q\,y_{x-1},$$

car le nombre des parties jouées comprend la partie par laquelle on commence et ensuite y_x devient y_{x+1} ou y_{x-1} selon que le joueur a gagné ou perdu.

On peut écrire

$$y_x - p\,y_{x+1} - q\,y_{x-1} = 1;$$

c'est une équation aux différences, linéaire, à coefficients constants et à second membre constant. En l'intégrant par la méthode classique (n° 134) et en remarquant que l'on doit avoir $y_0 = 0$ et $y_{m+n} = 0$ on obtient le même résultat que précédemment.

184. L'expression de la durée moyenne (n° 182)

$$\frac{mq^m(q^n - p^n) + np^n(p^m - q^m)}{q^{m+n}(q-p) + p^{m+n}(p-q)}$$

prend la forme $\frac{0}{0}$ quand le jeu est équitable, c'est-à-dire quand $p = q = \frac{1}{2}$.

En appliquant deux fois de suite la règle connue, on obtient la valeur de cette expression

$$\frac{2(m+n)mn}{2(m+n)} = mn.$$

Lorsque le jeu est équitable, la durée moyenne est égale au produit des fortunes des joueurs.

185. On obtient le même résultat par l'emploi des formules de récurrence. En désignant par y_x la valeur de la durée moyenne lorsque le joueur A possède x francs, on a, comme précédemment (n° 183),

$$y_x - \frac{1}{2} y_{x+1} - \frac{1}{2} y_{x-1} = 1.$$

On peut intégrer cette équation par la méthode classique (n° 134). On peut simplement remarquer que, l'équation pouvant s'écrire

$$2 y_x - y_{x-1} - 2 = y_{x+1},$$

on déduit successivement de celle-ci

$$\begin{aligned} 2 y_1 - 2 &= y_2, \\ 2 y_2 - y_1 - 2 &= y_3, \\ 2 y_3 - y_2 - 2 &= y_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y_2 &= 2 y_1 - 2, \\ y_3 &= 3 y_1 - 6, \\ y_4 &= 4 y_1 - 12, \\ y_5 &= 5 y_1 - 20, \\ \ldots&\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et généralement

$$y_x = x y_1 - x(x-1).$$

y_{m+n} doit être nul, donc

$$0 = (m+n) y_1 - (m+n)(m+n-1)$$

par suite

$$y_1 = m + n - 1.$$

On a donc

$$y_x = x(m+n) - x^2.$$

La durée moyenne a donc pour valeur

$$y_m = mn.$$

Si la fortune de l'un des joueurs est infinie, la durée moyenne est infinie.

Quand les fortunes des joueurs sont égales, le jeu équitable dure en moyenne plus que tout autre jeu : c'est ce que démontre la formule du nº 184.

186. La première formule du nº 184 exprime la durée moyenne du jeu, que ce soit l'un ou l'autre joueur qui soit ruiné ; nous allons chercher quelle est la durée moyenne correspondant à la ruine du joueur A. En d'autres termes, la première formule du nº 184 exprime l'espérance mathématique d'un joueur H qui toucherait 1 fr par partie jouée ; nous allons chercher quelle serait l'espérance d'un joueur H qui toucherait 1 fr par partie jouée quand le joueur A serait ruiné et qui ne toucherait rien si le jeu se terminait par la ruine du joueur B.

Désignons par y_x la durée moyenne cherchée quand le joueur A possède x francs ; on a

$$y_x = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1} + p y_{x+1} + q y_{x-1}.$$

Le nombre moyen des parties jouées comprend en effet la partie par laquelle on commence, et elle a probabilité

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1}$$

pour compter dans la durée moyenne dont il s'agit. Après cette partie, la durée moyenne devient y_{x+1} ou y_{x-1} selon que le joueur a gagné ou perdu.

L'équation peut s'écrire

$$p y_{x+1} - y_x + q y_{x-1} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1} - \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1}.$$

C'est une équation linéaire à coefficients constants et à second membre.

La solution de l'équation sans second membre est

$$C + C'\left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Nous déterminerons une intégrale particulière de l'équation complète par analogie avec la théorie des équations différentielles linéaires; cette solution particulière est de la forme

$$C'' x\left(\frac{q}{p}\right)^x + C''' x.$$

En substituant cette valeur dans l'équation complète on détermine les constantes C'' et C''' :

$$C'' = \frac{1}{(q-p)\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right]} \quad \text{et} \quad C''' = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}{(q-p)\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right]}.$$

On a donc

$$y_x = C + C'\left(\frac{q}{p}\right)^x + \frac{x\left(\frac{q}{p}\right)^x}{(q-p)\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right]} + \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}{(q-p)\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right]}.$$

On détermine les constantes C et C' par la condition que y_x soit nul quand $x = 0$ et quand $x = m+n$; on obtient ainsi

$$y_x = \frac{2(m+n)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x\right] + x\left[\left(\frac{q}{p}\right)^x + \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right]\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right]}{(q-p)\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right]^2}.$$

En posant dans cette expression $x = m$, on obtient la valeur moyenne cherchée

$$y_m = \frac{2(m+n)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m\right] + m\left[\left(\frac{q}{p}\right)^m + \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right]\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right]}{(q-p)\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right]^2}.$$

La valeur moyenne correspondant à la ruine du joueur B s'obtiendrait en remplaçant p par q, q par p, m par n et inversement.

Si par exemple on pose $m=1$, $n=2$, on trouve, après réductions,

$$y_m = \frac{q(1+pq)}{(1-pq)^2},$$

cette valeur a déjà été obtenue (n° 175).

187. Dans le cas où $n=m$, la formule se réduit à

$$(1)\qquad y_m = \frac{mq^m(q^m-p^m)}{(q-p)(q^m+p^m)^2},$$

désignons cette valeur moyenne par M.

La valeur moyenne correspondant au joueur B est de même

$$(2)\qquad M' = \frac{mp^m(q^m-p^m)}{(q-p)(q^m+p^m)^2}.$$

On peut obtenir ces formules par une autre méthode. La durée moyenne du jeu est donnée par la première formule du n° 184 et elle a pour valeur $M+M'$; on a donc

$$(3)\qquad M+M' = \frac{m(q^m-p^m)}{(q-p)(q^m+p^m)}.$$

Soient $p_m, p_{m+2}, p_{m+4}, \ldots$ les probabilités pour que le joueur A soit ruiné à la $m^{\text{ième}}$, à la $(m+2)^{\text{ième}}$, à la $(m+4)^{\text{ième}}$, ... partie; la durée moyenne correspondant à la ruine du joueur A est

$$M = mp_m + (m+2)p_{m+2} + (m+4)p_{m+4} + \ldots.$$

Soient de même $p'_m, p'_{m+2}, p'_{m+4}, \ldots$ les probabilités pour que le joueur B soit ruiné à la $m^{\text{ième}}$, à la $(m+2)^{\text{ième}}$, ... partie; la durée moyenne correspondant à la ruine du joueur B est

$$M' = mp'_m + (m+2)p'_{m+2} + (m+4)p'_{m+4} + \ldots.$$

Nous avons reconnu précédemment (n° 181) que

$$\frac{p_m}{p'_m} = \frac{p_{m+2}}{p'_{m+2}} = \frac{p_{m+4}}{p'_{m+4}} = \ldots = \frac{q^m}{p^m};$$

il en résulte qu'on a

$$(4)\qquad \frac{M}{M'} = \frac{q^m}{p^m}.$$

Les formules (3) et (4) permettent de déterminer M et M'; elles conduisent aux formules (1) et (2).

188. Reprenons le cas général : la *durée moyenne relative* correspondant à la ruine du joueur A est la durée moyenne qui précède sa ruine quand ruine il y a ; on l'obtient donc en divisant la quantité y_m par la probabilité de la ruine, c'est-à-dire par

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}-\left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}-1}.$$

La durée moyenne relative est donc

$$\frac{2(m+n)\left(\frac{q}{p}\right)^{n}\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m}\right]+m\left[1+\left(\frac{q}{p}\right)^{n}\right]\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}-1\right]}{(q-p)\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}-1\right]\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{n}-1\right]}.$$

Lorsque $n=m$, la durée moyenne relative est la même pour les deux joueurs.

189. Lorsque le jeu est équitable, les formules deviennent indeterminées ; en leur appliquant la règle connue on est conduit à la valeur de y_m ; on a

$$y_m=\frac{(2n+m)mn}{3(m+n)}.$$

La *durée moyenne relative* correspondant à la ruine du joueur A est

$$\frac{m}{3}(2n+m).$$

190. **Cas où le jeu est symétrique.** — *Le joueur A possède m francs et le joueur B, n francs ; ils jouent 1 fr par partie avec égale probabilité de gain et de perte ; quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par la ruine du joueur A ?*

Notre méthode, pour résoudre ce problème, consiste à employer une suite de termes dont le premier comporte une erreur. Le second

terme supprime l'erreur du premier et en introduit une autre ; il en est ainsi jusqu'au dernier terme qui supprime l'erreur de l'avant-dernier sans en introduire de nouvelle. La formule finale à laquelle nous parviendrons, obtenue par une suite d'approximations, sera donc rigoureusement exacte.

Désignons par $\Pi_{\mu,m,n}$ la probabilité cherchée ; $\Pi_{\mu,m,\infty}$ est la probabilité de ruine du joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, en supposant que le joueur B ait une fortune infinie ; cette probabilité a été calculée (nº 140) ; elle a pour valeur

$$\Pi_{\mu,m,\infty} = \frac{m}{\mu}\,\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}.$$

Nous pouvons poser en première approximation

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty}.$$

Cette formule donne pour la probabilité cherchée une valeur trop forte ; de toutes les séries d'alternatives de gain et de perte produisant la ruine du joueur A précisément en μ parties, nous devons retrancher celles qui produiraient précédemment la ruine du joueur B.

Si le joueur B quand il est ruiné pouvait continuer à jouer jusqu'à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, il y aurait probabilité égale pour qu'il gagnât $m+n$ francs et qu'il ruinât le joueur A, ou pour qu'il perdît encore $m+n$ francs, ce qui porterait sa perte à $m+2n$ francs.

A chaque série d'alternatives de gain et de perte qui produit la ruine du joueur B et qui aurait ensuite produit celle du joueur A correspond une série qui donnerait au joueur B la perte $m+2n$ s'il possédait cette somme ; et, comme aucune des premières séries ne ruine le joueur A avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, aucune des secondes ne ruinerait le joueur B avant cette $\mu^{\text{ième}}$ partie, s'il possédait $m+2n$ francs. Ceci nous incite à poser en seconde approximation

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty}.$$

La quantité $\Pi_{\mu,m+2n,\infty}$ que nous avons retranchée est trop forte, car nous avons retranché les séries produisant la ruine du joueur B supposé posséder $m+2n$ francs, alors que nous n'aurions dû tenir compte

parmi elles que de celles qui ne causent pas d'abord la ruine du joueur A.

Or, si le joueur A supposé d'abord ruiné avait pu continuer à jouer, il n'est ni plus ni moins probable qu'il eût gagné les $2m+2n$ francs qui auraient amené la ruine de B qu'il n'est probable qu'il eût perdu ces $2m+2n$ francs, ce qui aurait porté sa perte à $3m+2n$ francs. On doit donc poser en troisième approximation

$$\Pi_{\mu,m,n}=\Pi_{\mu,m,\infty}-\Pi_{\mu,m+2n,\infty}+\Pi_{\mu,3m+2n,\infty}$$

et ainsi de suite; on a donc

$$\Pi_{\mu,m,n}=\Pi_{\mu,m,\infty}-\Pi_{\mu,m+2n,\infty}+\Pi_{\mu,3m+2n,\infty}-\dots$$
$$+\Pi_{\mu,(2\lambda+1)m+2\lambda n,\infty}-\Pi_{\mu,(2\lambda+1)m+(2\lambda+2)n,\infty}+\dots.$$

La formule s'arrête lorsque la quantité $(2\lambda+1)m+2\lambda n$ ou $(2\lambda+1)m+(2\lambda-2)n$ est supérieur à μ.

191. *Le joueur A possède m francs et le joueur B, n francs; ils jouent 1 fr par partie avec égale probabilité de gain et de perte : quelle est la probabilité pour que le jeu se termine en μ parties au maximum par la ruine du joueur A?*

La probabilité cherchée $P_{\mu,m,n}$ est évidemment la somme des probabilités

(1) $$\sum_{\mu=m}^{\mu=\mu}\Pi_{\mu,m,n}$$

μ prenant les valeurs m, $m+2$, $m+4$, ... On a

$$P_{\mu,m,n}=\Sigma\Pi_{\mu,m,n}=\Sigma\Pi_{\mu,m,\infty}-\Sigma\Pi_{\mu,m+2n,\infty}+\Sigma\Pi_{\mu,3m+2n,\infty}-\dots.$$

$\Sigma\Pi_{\mu,m,\infty}$ est la probabilité de ruine d'un joueur en μ parties quand son adversaire est infiniment riche, c'est-à-dire $P_{\mu,m,\infty}$; les termes suivants sont de même $P_{\mu,m+2n,\infty}$, $P_{\mu,3m+2n,\infty}$, ...

(2) $$P_{\mu,m,n}=P_{\mu,m,\infty}-P_{\mu,m+2n,\infty}+P_{\mu,3m+2n,\infty}-P_{\mu,3m+4n,\infty}+\dots.$$

Les termes du second membre se calculent soit par la formule du n° 138, soit par celle du n° 141.

La probabilité $P_{\mu,m,n}$ s'obtient par la formule (1) ou par la formule (2).

La probabilité pour que le jeu se termine en μ parties au maximum par la ruine de l'un quelconque des joueurs est la somme des probabilités de ruine relatives à chaque joueur.

192. **Étude du cas général.** — *Le joueur* A *possède m francs, le joueur* B *possède n francs : quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie par la ruine du joueur* A ?

Nous supposerons que, à chaque partie, le joueur A a probabilité p pour gagner 1 fr et probabilité $q = 1 - p$ pour perdre 1 fr.

On peut facilement ramener le cas général au cas particulier du jeu symétrique.

D'après un principe précédemment exposé (n° 144), les probabilités de ruine de l'un quelconque des joueurs à une partie indiquée sont les mêmes *au point de vue des coefficients* que si le jeu était symétrique. En d'autres termes, la probabilité pour que le joueur A soit ruiné à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est le produit d'un coefficient indépendant de p et de q par une quantité dépendant de p et de q et qui est évidemment $p^{\frac{\mu-m}{2}} q^{\frac{\mu+m}{2}}$ puisque, sur les μ parties, il y a $\frac{\mu+m}{2}$ pertes et $\frac{\mu-m}{2}$ gains.

Si donc on pose

$$\varphi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu} \frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!},$$

on a simplement

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu,m,n} = p^{\frac{\mu-m}{2}} q^{\frac{\mu+m}{2}} [&\varphi_{\mu,m} - \varphi_{\mu,m+2n} + \varphi_{\mu,3m+2n} \\ &- \varphi_{\mu,3m+4n} + \varphi_{\mu,5m+4n} - \varphi_{\mu,5m+6n} + \ldots].\end{aligned}$$

193. On peut exprimer $\Pi_{\mu m,n}$ comme précédemment (n° 190) en fonction des probabilités analogues de la forme $\Pi_{\mu,x,\infty}$. On a

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} &- \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} \Omega_{\mu,m+2n,\infty} \\ &+ \left(\frac{p}{q}\right)^{m+n} \Pi_{\mu,3m+2n,\infty} - \left(\frac{q}{p}\right)^{2(m+n)} \Omega_{\mu,3m+4n,\infty} \\ &+ \left(\frac{p}{q}\right)^{2(m+n)} \Pi_{\mu,5m+4n,\infty} - \left(\frac{q}{p}\right)^{3(m+n)} \Omega_{\mu,5m+6n,\infty} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ω désigne l'expression Π dans laquelle p est remplacé par q et inversement.

En d'autres termes, les quantités Ω désignant les probabilités relatives au joueur B.

Par exemple, le second terme de $\Pi_{\mu,m,n}$ est

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\Omega_{\mu,m+2n,\infty}$$
$$=\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\frac{m+2n}{\mu}\,\frac{\mu!}{\frac{\mu-m-2n}{2}!\,\frac{\mu+m+2n}{2}!}\,p^{\frac{\mu+m+2n}{2}}\,q^{\frac{\mu-m-2n}{2}};$$

il est identique au second terme de la formule du n° 192.

194. On peut démontrer directement la dernière formule qui exprime $\Pi_{\mu,m,n}$ en modifiant quelque peu le raisonnement employé dans le cas où il y a symétrie (n° 190).

On a toujours en première approximation

$$\Pi_{\mu,m,n}=\Pi_{\mu,m,\infty}.$$

Cette formule donne pour la probabilité cherchée une valeur trop forte; de toutes les séries d'alternatives de gain et de perte produisant la ruine du joueur A précisément en μ parties, nous devons retrancher celles qui produiraient précédemment la ruine du joueur B.

Si le joueur B, quand il est ruiné, pouvait continuer à jouer jusqu'à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la probabilité pour qu'il gagnât $m+n$ francs et qu'il ruinât le joueur A serait à la probabilité pour que lui-même perdît encore $m+n$ francs dans le rapport de q^{m+n} à p^{m+n} (n° 181), et comme, dans cette hypothèse, sa perte serait $m+2n$ francs, on doit poser en seconde approximation

$$\Pi_{\mu,m,n}=\Pi_{\mu,m,\infty}-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\Omega_{\mu,m+2n,\infty}.$$

La démonstration est, comme on le voit, absolument analogue à celle du n° 190; la formule obtenue par une suite d'approximations est finalement exacte.

195. *Le joueur* A *possède* m *francs et le joueur* B, n *francs; quelle est*

la probabilité pour que le jeu se termine en μ parties, au maximum, par la ruine du joueur A?

La probabilité cherchée $P_{\mu,m,n}$ est évidemment la somme des probabilités $\Pi_{\mu,m,n}$

$$P_{\mu,m,n} = \sum_{\mu=m}^{\mu=\mu} \Pi_{\mu,m,n},$$

μ prenant les valeurs m, $m+2$, $m+4$, ...

On peut obtenir $P_{\mu,m,n}$ en sommant les termes de la formule du n° 192 ou ceux de la formule du paragraphe précédent. Dans ce dernier cas, on a

$$\begin{aligned} P_{\mu,m,n} = P_{\mu,m,\infty} &- \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} Q_{\mu,m+2n,\infty} \\ &+ \left(\frac{p}{q}\right)^{m+n} P_{\mu,3m+2n,\infty} - \left(\frac{q}{p}\right)^{2(m+n)} Q_{\mu,3m+4n,\infty} + \ldots; \end{aligned}$$

Q est obtenu en substituant p à q dans l'expression de P. Les quantités Q désignent donc des probabilités relatives au joueur B.

Les termes du second membre se calculent par la formule du n° 148 ou par celle du n° 149.

Les calculs sont d'ailleurs impraticables si m, n et μ ne sont pas de petits nombres. Il est toujours facile de calculer les probabilités avec une grande approximation en ayant recours à la théorie des probabilités continues qui sera exposée plus loin.

La probabilité pour que le jeu se termine en μ parties au maximum par la ruine de l'un quelconque des joueurs est la somme des probabilités de ruine relatives à chaque joueur.

196. *Si aucune limite n'est assignée pour la durée du jeu, quelle est la probabilité de ruine du joueur* A?

La quantité que nous cherchons est

$$P_{\infty,m,n} = \sum_{\mu=m}^{\mu=\infty} \Pi_{\infty,m,n}$$

ou

$$P_{\infty,m,\infty} - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} Q_{\infty,m+2n,\infty} + \left(\frac{p}{q}\right)^{m+n} P_{\infty,3m+2n,\infty} - \left(\frac{q}{p}\right)^{2(m+n)} Q_{\infty,3m+4n,\infty} + \ldots.$$

Supposons que le jeu soit avantageux pour le joueur A, c'est-à-dire que p soit supérieur à q. Le premier terme est la probabilité de ruine du joueur A possédant m francs et jouant contre un adversaire infiniment riche (n° 150); cette probabilité a pour valeur

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

Le troisième terme est le produit par $\left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}$ de la probabilité totale de ruine du joueur A possédant $3m+2n$ francs, c'est-à-dire

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{m+n} \left(\frac{q}{p}\right)^{3m+2n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{2m+n}.$$

Le cinquième terme est de même

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{3m+2n},$$

et les termes de rang impair forment une progression géométrique dont la somme

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m \left[1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} + \left(\frac{q}{p}\right)^{2(m+n)} + \left(\frac{q}{p}\right)^{3(m+n)} + \ldots\right]$$

a pour valeur

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}.$$

Les probabilités $Q_{\infty,x,\infty}$ qui figurent dans les termes de rang pair sont des probabilités totales de ruine d'un joueur B que le jeu désavantage et dont l'adversaire est infiniment riche. Ces probabilités sont égales à un (n° 150), de sorte que les termes de rang pair se réduisent à la série

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} + \left(\frac{q}{p}\right)^{2(m+n)} + \left(\frac{q}{p}\right)^{3(m+n)} + \ldots$$

dont la somme est

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}.$$

La probabilité de ruine du joueur A est donc

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{n}-1\right]}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}-1}.$$

C'est le résultat que nous avions obtenu (n° 176); il ne changerait pas si le jeu désavantageait le joueur A.

197. **Distribution des probabilités.** — Pour résoudre d'une façon complète le troisième problème de la théorie du jeu, il faut connaître les probabilités relatives à tous les cas possibles; nous connaissons les probabilités relatives à tous les cas où il y a ruine : il nous reste à déterminer les probabilités relatives aux cas où les joueurs ne sont pas ruinés à la $\mu^{\text{ième}}$ partie. Nous allons donc résoudre le problème suivant :

Le joueur A possédant m francs et le joueur B, n francs, quelle est la probabilité pour que à la $\mu^{\text{ième}}$ partie le joueur A perde la somme x?

Nous supposons d'abord que le jeu est symétrique. Si les deux joueurs avaient une fortune infinie ou simplement supérieure à μ, la probabilité de la perte x pour le joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait $\varpi_{\mu,x}$. Il faut retrancher de cette quantité les probabilités relatives aux cas où le joueur A est d'abord ruiné et les probabilités relatives aux cas où le joueur B est d'abord ruiné.

Déterminons les probabilités relatives aux cas où le joueur A est d'abord ruiné.

Si le joueur A lorsqu'il est ruiné pouvait continuer à jouer, il y aurait par suite de la symétrie de la probabilité autant de chances pour qu'il gagne la somme m et pour que sa perte finale soit x que de chances pour qu'il perde la somme m et pour que sa perte finale soit $2m-x$. La probabilité relative aux cas où le joueur A est d'abord ruiné est donc en première approximation $\varpi_{\mu,2m-x}$.

Cette valeur est trop forte; elle comprend les probabilités relatives aux cas où le joueur B, d'abord ruiné, aurait ensuite gagné la somme $n+2m-x$ s'il avait pu continuer à jouer; nous devons donc retrancher de $\varpi_{\mu,2m-x}$ les probabilités relatives au cas où le joueur B, d'abord ruiné, aurait ensuite gagné la somme $n+2m-x$ ou les probabilités relatives aux cas où le joueur B, d'abord ruiné, aurait ensuite perdu $n+2m-x$, c'est-à-dire retrancher $\varpi_{\mu,2n+2m-x}$. Ainsi, aux cas où le joueur A est d'abord ruiné correspond, en seconde approximation, la quantité

$$\varpi_{\mu,2m-x}-\varpi_{\mu,2m+2n-x}.$$

Le raisonnement est analogue à celui du n° 190; il conduit par une suite d'approximations à un résultat exact.

Les probabilités relatives aux cas où le joueur B est d'abord ruiné s'obtiennent par la même méthode; finalement la probabilité cherchée a pour valeur

$$\begin{aligned}\varpi_{\mu,x}-\varpi_{\mu,2m-x}+\varpi_{\mu,2m+2n-x}-\varpi_{\mu,4m+2n-x}+\ldots\\ -\varpi_{\mu,2n+x}+\varpi_{\mu,2n+2m+x}-\varpi_{\mu,4n+2m+x}+\ldots.\end{aligned}$$

198. Cette formule suppose que le jeu est équitable; mais, d'après la remarque du n° 144, elle s'applique au cas d'un jeu quelconque, pourvu que les quantités telles que

$$\varpi_{\mu,z}=\frac{\mu!}{\frac{\mu-z}{2}!\,\frac{\mu+z}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}$$

soient remplacées par les suivantes

$$\frac{\mu!}{\frac{\mu-z}{2}!\,\frac{\mu+z}{2}!}\,p^{\frac{\mu-z}{2}}\,q^{\frac{\mu+z}{2}}.$$

Connaissant la distribution des probabilités, on calcule sans difficulté la probabilité totale de gain du joueur A et l'espérance mathématique de son jeu.

199. **Remarque relative aux épreuves répétées.** — Les questions que nous avons résolues en traitant le second et le troisième

problème de la théorie du jeu peuvent être présentées sous une forme qui paraît plus générale parce qu'elle ne se rapporte pas explicitement à un jeu. Par exemple, on peut énoncer comme suit le problème du n° 148 :

Soient p la probabilité d'un événement A; $q = 1 - p$ la probabilité de l'événement contraire B. Quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves au maximum, le nombre des arrivées de l'événement B dépasse de m le nombre des arrivées de l'événement A?

Le problème traité au n° 158 peut s'énoncer de la façon suivante :

Soient p la probabilité d'un événement A; $q = 1 - p$ la probabilité de l'événement contraire B. Quelle est la valeur moyenne du nombre d'épreuves qu'il faut tenter pour que le nombre des arrivées de l'événement B surpasse de m le nombre des arrivées de l'événement A.

Le problème résolu au n° 195 peut s'énoncer comme suit :

Soient p la probabilité d'un événement A; $q = 1 - p$ la probabilité de l'événement contraire B. Quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves au maximum, le nombre des arrivées de l'événement B surpasse de m le nombre des arrivées de l'événement A; le nombre des arrivées de A n'ayant pas précédemment dépassé de n le nombre des arrivées de l'événement B.

Cette nouvelle manière d'énoncer les problèmes est en réalité identique à celle que nous avons employée; si elle semble plus générale, elle paraît, par contre, moins expressive et moins claire.

200. Cas de trois alternatives. — Les conditions du jeu sont les suivantes :

A chaque partie, le joueur A a probabilité p de gagner 1 fr que lui remet le joueur B ; probabilité q de perdre 1 fr qu'il remet au joueur B et probabilité $r = 1 - p - q$ de faire partie nulle. Le joueur A possède m francs et le joueur B, n francs.

Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, la probabilité pour que le joueur A soit ruiné est

$$X = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - \left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1}.$$

On démontre cette formule par la méthode du n° 176 ou par celle du n° 179. La probabilité de ruine du joueur B est $1 - X$.

Relativement à la durée moyenne du jeu, on est conduit au même théorème que précédemment (n° 182), et, si le jeu est équitable ($p = q$), la durée moyenne a pour valeur $\frac{mn}{1-r}$.

On pourrait résoudre le problème analogue à celui qui a été traité au n° 186; on serait conduit à la même formule.

201. Quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par la ruine du joueur A?

En désignant par $\Pi_{\mu,m,n}$ cette probabilité, on a

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,x} - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} \Omega_{\mu,m-2n,x} + \left(\frac{p}{q}\right)^{m+n} \Pi_{\mu,3m-2n,x} - \left(\frac{q}{p}\right)^{2(m+n)} \Omega_{\mu,3m+4n,x} + \ldots;$$

Ω représente la probabilité analogue à Π mais relative au joueur B et s'obtient en remplaçant p par q, et inversement, dans l'expression de Π.

La démonstration de cette formule est identique à la démonstration directe donnée au n° 194 et relative au cas où $r = 0$. Cette démonstration est en effet basée sur une remarque (n° 181) dont les conclusions subsistent intégralement dans le cas actuel.

202. La probabilité pour que le joueur A perde la somme x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est exprimée par la formule

$$\varpi_{\mu,x} - \left(\frac{p}{q}\right)^{m-x} \varpi_{\mu,2m-x} + \left(\frac{p}{q}\right)^{m+n-x} \varpi_{\mu,2m+2n-x} - \left(\frac{p}{q}\right)^{2m+n-x} \varpi_{\mu,4m+2n-x} + \ldots$$
$$- \left(\frac{p}{q}\right)^{n} \varpi_{\mu,2n+x} + \left(\frac{p}{q}\right)^{n+m} \varpi_{\mu,2n+2m+x} - \left(\frac{p}{q}\right)^{2n+m} \varpi_{\mu,4n+2m+x} + \ldots$$

dont la démonstration est analogue à celle qui a été exposée au n° 197. Dans le cas considéré, il n'y a pas symétrie : la probabilité du gain z n'est pas égale à la probabilité de la perte z, mais la probabilité du gain z est à la probabilité de la perte z dans le rapport de p^z à q^z. Il suffit de modifier la démonstration du n° 197 en tenant compte de cette remarque pour obtenir la dernière formule.

203. **Cas où il y a plusieurs joueurs.** — Dans le cas où il y a trois joueurs possédant des fortunes limitées, les différents problèmes paraissent d'un tout autre ordre de difficulté que dans le cas de deux joueurs.

En dehors de la question très élémentaire résolue au n° 14, il nous est possible de calculer, d'une façon relativement simple, la durée moyenne du jeu.

204. *Trois joueurs* A, B, C *possédant les sommes a, b, c jouent dans les conditions suivantes, jusqu'à ce que l'un d'eux soit ruiné. A chaque partie, le perdant donne* 1 fr *au gagnant, le troisième joueur fait partie nulle; les probabilités sont les mêmes pour les trois joueurs.*

Quelle est la durée moyenne du jeu?

Cette durée moyenne est l'espérance mathématique d'un joueur H qui recevrait 1 fr par partie jouée.

Soit $f(x, y, z)$ la durée moyenne du jeu lorsque le joueur A possède x francs, le joueur B, y francs et le joueur C, z francs $(x+y+z=a+b+c)$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 1 &+ \frac{1}{6} f(x+1, y-1, z) + \frac{1}{6} f(x+1, y, z-1) \\ &+ \frac{1}{6} f(x, y+1, z-1) + \frac{1}{6} f(x, y-1, z+1) \\ &+ \frac{1}{6} f(x-1, y+1, z) + \frac{1}{6} f(x-1, y, z+1). \end{aligned}$$

En effet, la durée moyenne du jeu se compose d'abord de la prochaine partie, puis six cas sont également probables : A gagne et B perd, A gagne et C perd, B gagne et C perd, C gagne et B perd, B gagne et A perd, C gagne et A perd.

Sans chercher la solution générale de l'équation aux différences partielles, on peut montrer que seule la solution particulière

$$f(x, y, z) = \frac{3xyz}{x+y+z}$$

vérifie la condition aux limites

$$f(x, y, z) = 0$$

pour $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$.

Supposons, en effet, que la fonction $\varphi(x, y, z)$ satisfasse à l'équation ci-dessus, retranchons $\varphi(x, y, z)$ de $f(x, y, z)$ et désignons par $\psi(x, y, z)$ leur différence; nous aurons

$$(1)\qquad \begin{aligned}\psi(x, y, z) = {} & \frac{1}{6}\psi(x+1, y-1, z) + \frac{1}{6}\psi(x+1, y, z-1) \\ & + \frac{1}{6}\psi(x, y+1, z-1) + \frac{1}{6}\psi(x, y-1, z+1) \\ & + \frac{1}{6}\psi(x-1, y+1, z) + \frac{1}{6}\psi(x-1, y, z+1)\end{aligned}$$

avec la condition aux limites $\psi = 0$ lorsque x ou y ou z s'annulent.

Nous allons voir que ψ est nul. Supposons que la fonction ψ soit maxima pour les valeurs x, y, z de ses variables.

D'après l'équation (1), si l'un des ψ du second membre est inférieur à $\psi(x, y, z)$, l'un au moins de ces ψ du second membre est supérieur à $\psi(x, y, z)$: or cela est contraire à notre hypothèse: donc tous les ψ sont égaux. En d'autres termes, la fonction $\psi(x, y, z)$ est indépendante des valeurs de ses variables, et, comme elle s'annule en même temps que l'une quelconque d'entre elles, elle est nulle constamment.

Si, dans la fonction

$$f(x, y, z) = \frac{3xyz}{x+y+z}$$

on remplace x par a, y par b, z par c, on obtient la durée moyenne cherchée

$$\frac{3abc}{a+b+c}.$$

205. Si l'on suppose la fortune du joueur C infinie, la durée moyenne du jeu est $3ab$: elle est trois fois plus longue que si les joueurs A et B jouaient seuls.

Si deux joueurs ont des fortunes infinies, la durée moyenne du jeu est infinie.

206. On peut être conduit directement à la considération de la fonction ψ en se posant la question suivante : Le jeu étant celui que nous étudions, quelle est la probabilité pour qu'il dure indéfiniment?

Si nous désignons par $\psi(x, y, z)$ cette probabilité lorsque le joueur

A possède x francs, le joueur B y francs et le joueur C z francs $(x+y+z=a+b+c)$, cette fonction devra satisfaire à l'équation (1) et à la condition aux limites $\psi=0$ pour x ou y ou $z=0$.

D'après la démonstration qui précède, la probabilité pour que le jeu dure indéfiniment est nulle, résultat évident.

207. *Trois joueurs* A, B, C *ayant pour fortunes* a, b, c *jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux aux conditions suivantes : A chaque partie, l'un des joueurs gagne* 2 fr, *les deux autres joueurs perdent chacun* 1 fr. *En supposant que, à chaque partie, l'un quelconque des joueurs ait une chance sur trois de gagner et deux chances sur trois de perdre, quelle est la durée moyenne du jeu?*

Cette durée moyenne est l'espérance mathématique d'un joueur H qui recevrait 1 fr par partie jouée.

Désignons par $f(x, y, z)$ la durée moyenne lorsque le joueur A possède x francs, le joueur B, y francs et le joueur C, z francs; $(x+y+z=a+b+c)$; la fonction f doit satisfaire à la relation

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 1 + \frac{1}{3}f(x+2,\ y-1,\ z-1) \\ + \frac{1}{3}f(x-1,\ y+2,\ z-1) + \frac{1}{3}f(x-1,\ y-1,\ z+2). \end{aligned}$$

En effet, le jeu se composera d'abord d'une partie, après laquelle trois cas seront également probables, correspondant chacun au gain d'un des trois joueurs.

Sans chercher à déterminer la solution générale de l'équation aux différences partielles, on peut démontrer, comme dans le problème précédent, que seule la solution particulière

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x+y+z-2}$$

satisfait à la condition aux limites : $f=0$ pour $x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$.

En remplaçant x, y, z par a, b, c respectivement, on obtient la valeur moyenne cherchée

$$\frac{abc}{a+b+c-2}.$$

208. Si la fortune du joueur C est infinie, la durée moyenne est ab; elle est donc la même que si les joueurs A et B jouaient seuls à 1 fr par partie.

Si deux joueurs ont une fortune infinie, la durée moyenne du jeu est infinie.

209. *Trois joueurs* A, B, C *possédant les sommes a, b, c jouent jusqu'à ce que deux d'entre eux soient ruinés. Quelle est la durée moyenne du jeu?*

Nous supposerons d'abord que les conditions du jeu soient les suivantes : à chaque partie le perdant verse 1 fr au gagnant, le troisième joueur fait partie nulle. Les probabilités sont les mêmes pour les trois joueurs, et, quand l'un de ceux-ci est ruiné, les deux autres continuent à jouer, le perdant versant à chaque partie 1 fr au gagnant. Le jeu prend fin quand l'un de ces joueurs est ruiné.

La durée moyenne du jeu se compose :

1° De la durée moyenne du jeu jusqu'à la ruine de l'un des joueurs (n° 204); cette durée est $\frac{3abc}{a+b+c}$;

2° De la durée moyenne après la ruine de l'un des joueurs. Si, au moment de la ruine d'un premier joueur, on connaissait la somme m que possède un second joueur et la somme n que possède le troisième ($m+n=a+b+c=s$), la durée moyenne d'un jeu (n° 184) serait mn :

Soit p_1 la probabilité pour que le joueur A soit ruiné le premier, le joueur B possédant alors 1 fr et le joueur C, $(s-1)$ francs.

Soit p_2 la probabilité pour que le joueur A soit ruiné le premier, le joueur B possédant alors 2 fr et le joueur C, $(s-2)$ francs, etc.

Soit q_1 la probabilité pour que le joueur B soit ruiné le premier, le joueur C possédant alors 1 fr et le joueur A, $(s-1)$ francs.

Soit q_2 la probabilité pour que le joueur B soit ruiné le premier, le joueur C possédant alors 2 fr et le joueur A, $(s-2)$ francs, etc.

Soit r_1 la probabilité pour que le joueur C soit ruiné le premier, le joueur A possédant alors 1 fr et le joueur B, $(s-1)$ francs.

Soit r_2 la probabilité pour que le joueur C soit ruiné le premier, le joueur A possédant alors 2 fr et le joueur B, $(s-2)$ francs, etc.

La durée moyenne cherchée est

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{3abc}{a+b+c} &+ p_1 1(s-1) + p_2 2(s-2) + p_3 3(s-3) + \ldots + p_{s-1}(s-1)1 \\ &+ q_1 1(s-1) + q_2 2(s-2) + q_3 3(s-3) + \ldots + q_{s-1}(s-1)1 \\ &+ r_1 1(s-1) + r_2 2(s-2) + r_3 3(s-3) + \ldots + r_{s-1}(s-1)1. \end{aligned}$$

Pour calculer la somme des termes qui contiennent les probabilités p, nous écrirons de deux manières différentes l'expression de la durée moyenne du jeu en supposant que celui-ci prenne fin à la ruine de l'un des joueurs.

La durée moyenne du jeu a pour valeur $\frac{3abc}{a+b+c}$, or cette quantité peut être considérée comme la différence de deux autres.

On peut d'abord supposer que, B et C ayant pour fortunes b et c, le joueur A possède une fortune infinie et retrancher ensuite du résultat obtenu dans cette hypothèse des termes correspondant à ce fait que le joueur A n'a pas une fortune infinie mais une fortune égale à a.

Si A avait une fortune infinie, la durée moyenne du jeu serait (n° 205) $3bc$.

Il faut retrancher de cette quantité la diminution de durée moyenne provenant de la possibilité de la ruine du joueur A.

Cette diminution est

$$3[p_1 1(s-1) + p_2 2(s-2) + p_3 3(s-3) + \ldots + p_{s-1}(s-1)1],$$

car les termes de cette suite contiennent les différentes probabilités du joueur A multipliées par les diminutions de durée moyenne correspondantes.

Par exemple, le joueur A peut être ruiné, les joueurs B et C possédant 2 fr et $(s-2)$ francs; cette éventualité qui a pour probabilité p_2 diminue la durée moyenne de la quantité $3\times 2(s-2)$, car, si le joueur A lorsqu'il est ruiné pouvait continuer à jouer possédant une fortune infinie, la durée moyenne du jeu serait $3\times 2(s-2)$.

La durée moyenne du jeu considéré a donc pour expression $\frac{3abc}{a+b+c}$ et

$$3bc - 3[p_1 1(s-1) + p_2 2(s-2) + \ldots + p_{s-1}(s-1)1]$$

on en déduit

$$p_1 1(s-1) + p_2 2(s-2) + \ldots + p_{s-1}(s-1) 1 = bc - \frac{abc}{a+b+c} = \frac{bc(b+c)}{a+b+c}.$$

On a de même

$$q_1 1(s-1) + q_2 2(s-2) + \ldots + q_{s-1}(s-1) 1 = \frac{ac(a+c)}{a+b+c},$$

$$r_1 1(s-1) + r_2 2(s-2) + \ldots + r_{s-1}(s-1) 1 = \frac{ab(a+b)}{a+b+c}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient l'expression

$$\frac{3abc}{a+b+c} + \frac{ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)}{a+b+c}.$$

Telle est la valeur de la durée moyenne.

210. Le problème qui précède peut être ramené à l'intégration d'une équation aux différences partielles :

En désignant par $f(x, y, z)$ la durée totale du jeu (c'est-à-dire jusqu'à la ruine de deux des joueurs) quand le joueur A possède x francs, le joueur B, y francs, et le joueur C, z francs ($x+y+z=a+b+c$), on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 1 &+ \frac{1}{6} f(x+1, y-1, z) + \frac{1}{6} f(x+1, y, z-1) \\ &+ \frac{1}{6} f(x, y+1, z-1) + \frac{1}{6} f(x, y-1, z+1) \\ &+ \frac{1}{6} f(x-1, y+1, z) + \frac{1}{6} f(x-1, y, z+1) \end{aligned}$$

comme dans le cas du n° 204, mais les conditions aux limites sont différentes.

Quand x, par exemple, est nul, c'est que le joueur A est ruiné et alors la durée moyenne du jeu est yz (n° 184).

On doit donc joindre à l'équation ci-dessus les conditions aux limites

$$f(0, y, z) = yz, \qquad f(x, 0, z) = xz, \qquad f(x, y, 0) = xy.$$

Ce système admet pour solution

$$f(x, y, z) = \frac{3xyz}{x+y+z} + \frac{xy(x+y) + xz(x+z) + yz(y+z)}{x+y+z}.$$

et l'on démontre comme précédemment (n° 204) que cette solution est unique.

La durée moyenne totale du jeu s'obtient en posant $x=a$, $y=b$, $z=c$; elle a donc pour valeur

$$\frac{3abc}{a+b+c}+\frac{ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)}{a+b+c}.$$

Lorsque $a=b=c$, cette expression se réduit à $3a^2$; la durée moyenne $2a^2$, après que l'un des joueurs est ruiné, est donc alors la même que si l'un des deux autres joueurs avait gagné la totalité de ce que le premier a perdu.

211. On peut supposer les conditions du jeu différentes : à chaque partie, chacun des joueurs a une chance sur trois de gagner 2 fr et deux chances sur trois de perdre 1 fr. Quand l'un des trois joueurs est ruiné, les deux autres continuent à jouer comme dans le cas précédent.

Le raisonnement qui a été employé subsiste intégralement; il suffit de remplacer les valeurs moyennes obtenues dans le premier cas (n° 204) par celles que l'on obtient dans le second (n° 207).

La durée moyenne, avant la ruine de l'un des joueurs, est

$$\frac{abc}{a+b+c-2};$$

la durée moyenne, après cette ruine, est

$$\frac{ab(a+b-2)+ac(a+c-2)+bc(b+c-2)}{a+b+c-2},$$

et *la durée moyenne totale a pour valeur*

$$\frac{abc}{a+b+c-2}+\frac{ab(a+b-2)+ac(a+c-2)+bc(b+c-2)}{a+b+c-2}.$$

212. Le problème qui précède peut être ramené à l'intégration d'une équation aux différences partielles.

En désignant par $f(x, y, z)$ la durée moyenne totale du jeu (c'est-à-dire jusqu'à la ruine de deux des joueurs) quand le joueur A possède x francs, le joueur B, y francs et le joueur C, z francs

$(x+y+z=a+b+c)$, on a

$$f(x,y,z)=1+\frac{1}{3}f(x+2,y-1,z-1)+\frac{1}{3}f(x-1,y+2,z-1)+\frac{1}{3}f(x-1,y-1,z+2)$$

comme dans le cas du n° 207, mais les conditions aux limites sont différentes.

Quand x, par exemple, est nul, c'est que le joueur A est ruiné et alors la durée moyenne du jeu est yz (n° 184).

On doit donc joindre à l'équation précédente les conditions aux limites

$$f(0,y,z)=yz,\qquad f(x,0,z)=xz,\qquad f(x,y,0)=xy.$$

Ce système admet pour solution

$$f(x,y,z)=\frac{xyz}{x+y+z-2}+\frac{xy(x+y-2)+xz(x+z-2)+yz(y+z-2)}{x+y+z-2}$$

et l'on démontre comme précédemment (n° 204) que cette solution est unique.

La durée moyenne totale du jeu s'obtient en posant $x=a$, $y=b$, $z=c$; elle a donc pour valeur

$$\frac{abc}{a+b+c-2}+\frac{ab(a+b-2)+ac(a+c-2)+bc(b+c-2)}{a+b+c-2}.$$

CHAPITRE VI.

PROBABILITÉS CONTINUES UNIFORMES.

213. Les formules dont nous avons fait usage dans la théorie générale du jeu et dans la théorie des épreuves répétées présentent de très grands inconvénients.

Dans les cas les plus simples, relatifs à ces probabilités discontinues, on obtient facilement des formules donnant la solution des divers problèmes; mais, comme ces formules contiennent des factorielles, leur calcul est impraticable quand le nombre des épreuves n'est pas très petit.

Dès que les données d'un problème se compliquent, sans cependant que le problème change de nature, il devient de plus en plus difficile de trouver une formule qui en exprime la solution. Deux formules relatives à des problèmes de même nature peuvent être apparemment très différentes; il est cependant évident que, le nombre des épreuves devenant très grand, les solutions de ces deux problèmes doivent être représentées par des mêmes formules ne différant que par des coefficients.

Enfin, les formules discontinues ne sont pas expressives; elles ne donnent aucune idée des lois de la variation des probabilités avec le nombre des épreuves.

214. Ces inconvénients sont si évidents, que depuis longtemps on emploie, pour la théorie des épreuves répétées et pour le problème le plus simple de la théorie du jeu, des formules approchées qui sont continues et expressives, qui conduisent à des calculs simples et qui donnent une idée très nette de la variation des probabilités avec le

nombre des épreuves. Ces formules que l'on déduit des formules discontinues ont toujours été considérées comme approchées et c'est pour cette raison que leur usage est resté très limité. Des formules approchées ne peuvent servir de point de départ pour de nouvelles recherches, c'est pourquoi l'emploi des formules continues ne s'est aucunement étendu depuis Laplace.

215. Les problèmes qu'on s'était posés ne pouvant admettre comme solution exacte que des formules discontinues, l'idée de considerer les probabilités comme continues *a priori* fut seulement envisagée il y a quelques années lorsque je me proposai de résoudre des problèmes analogues mais dont les solutions exactes devaient être nécessairement continues.

La théorie édifiée alors était relativement particulière; il fallait la généraliser de façon qu'elle comprît les résultats connus avec beaucoup d'autres, il fallait aussi établir la classification des différents problèmes, d'après leurs caractères réels et pour cela, si possible, les considérer tous comme des cas particuliers d'un seul genre de questions; il fallait enfin traiter ces questions en admettant *a priori* la continuité.

216. Pour satisfaire à cette dernière condition, nous supposerons une suite d'épreuves en nombre très grand, de telle sorte que la succession de ces épreuves puisse être considérée comme continue et que chaque épreuve puisse être considérée comme un élément.

S'il s'agit d'un très grand nombre μ d'épreuves, on peut supposer que celles-ci se suivent à intervalles de temps infiniment petits égaux et considérer la variable μ comme représentant le temps total.

Cette assimilation fournit une image précieuse qui fait concevoir la transformation des probabilités dans une suite d'épreuves comme un phénomène continu.

On comprend l'utilité d'une telle conception : par elle la théorie des probabilités, tout en conservant son caractère purement mathématique, prend une forme en quelque sorte animée dont un des avantages est de permettre certaines assimilations avec quelques théories de la Physique mathématique. Nous verrons même, en étudiant le rayon-

nement des probabilités, que ces analogies peuvent être précisées dans certains cas.

La variable qui represente un nombre d'épreuves peut donc être considérée comme exprimant le temps, mais, en dehors des questions où la notion de temps s'introduit d'elle-même, cette assimilation n'est pas nécessaire et toute la théorie des probabilités continues sera exposée sans qu'il y soit fait explicitement allusion.

217. Afin d'obtenir l'unité indispensable pour la classification des différents problèmes, nous ramènerons ceux-ci à un seul type, en supposant toujours qu'ils se rapportent à un jeu.

Lorsqu'un problème n'est pas explicitement relatif à un jeu, on peut le considérer comme cas particulier d'un problème relatif à un jeu.

Sans chercher la preuve de ce principe dans la suite de cette étude, il suffit de remarquer que si, dans un problème, il s'agit par exemple uniquement des probabilités $p_1, p_2, \ldots$, on augmente la généralité de ce problème en supposant qu'à chacune des probabilités corresponde un gain ou une perte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Le problème proposé n'est que le cas particulier pour lequel $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$.

La théorie des probabilités continues, pour être générale, devra donc être une théorie générale du jeu.

218. Nous imaginerons un jeu fictif, continu, tel que, s'il doit être joué μ parties, les gains ou les pertes des joueurs à la $\mu^{\text{ième}}$ partie soient supposés continus. Les probabilités s'exprimeront par des fonctions continues et enfin la quantité μ sera continue elle-même.

Lorsque nous parlerons de la $\mu^{\text{ième}}$ et de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ partie, il faudra entendre que, dans le second cas, μ est remplacé par $\mu + d\mu$.

Ce que nous appellerons les conditions du jeu pour une partie, ce sera l'ensemble des variations possibles des gains ou des pertes des joueurs entre μ et $\mu + d\mu$.

Pour bien comprendre la continuité de la quantité μ, il suffit de la considérer comme désignant le temps (comme dans la théorie de la spéculation qui sera exposée plus loin). On supposera le jeu continu et deux parties seront séparées par l'élément de temps $d\mu$.

219. On conçoit aisément les avantages qu'on peut tirer de la consi-

dération de ce jeu fictif : sa théorie est absolument indépendante de celle des probabilités discontinues, elle est mathématiquement exacte et ne procède ni par approximations ni par tâtonnements; elle permet, pour toutes les questions, l'emploi du calcul infinitésimal; ses formules sont simples et expressives et absolument générales.

Les problèmes dont s'occupe cette théorie se succèdent dans un ordre logique, d'après une classification méthodique; les calculs qu'ils nécessitent sont simples et leurs résultats peuvent presque toujours se traduire immédiatement en chiffres par les tables de Kramp qui sont reproduites à la fin du Volume.

En résumé, les principes qui servent de base à cette étude peuvent se ramener à deux conceptions : la supposition de la continuité et la réduction de toutes les questions à un type unique.

220. **Classification des probabilités.** — Les conditions du jeu peuvent être identiques dans chaque élément $d\mu$ ou, si l'on veut, à chaque partie; on dit alors que le jeu est uniforme ou qu'il y a *uniformité*.

Les conditions peuvent être variables d'une partie à l'autre suivant une loi donnée d'avance dépendant uniquement du rang occupé par cette partie et indépendante des faits anterieurs à cette partie. On dit alors qu'il y a *indépendance*.

Lorsque les conditions relatives à un élément $d\mu$, ou si l'on veut à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, dépendent des faits qui peuvent se produire antérieurement, on dit qu'il y a *connexité*.

221. On peut établir la classification en se plaçant à un second point de vue : s'il y a n joueurs, le problème dont on s'occupe peut être relatif à la détermination des gains de un, de deux, ..., de $n-1$ joueurs. On dit alors que les probabilités sont à une, deux, ..., $n-1$ variables.

222. Une troisième classification est également indispensable. Lorsque toutes les variables peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ les probabilités sont dites du *premier genre*. Lorsqu'une des variables est limitée dans un sens, les probabilités sont dites du

second genre. Lorsqu'une des variables est limitée dans les deux sens, les probabilités sont du *troisième genre*.

Les probabilités sont des *genres supérieurs* quand deux ou plusieurs variables sont limitées.

223. Si le lecteur éprouvait quelque difficulté à saisir les débuts de cette théorie, il pourrait, comme je l'ai déjà remarqué, remplacer la variable μ qui exprime une suite de parties par le temps t et considérer chaque partie comme l'intervalle de temps élémentaire dt. La notion de temps, familière à tous les mathématiciens, peut rendre cette étude beaucoup plus expressive.

Si, sous cette forme, la théorie paraissait encore trop abstraite, on pourrait débuter par la théorie de la spéculation exposée au Chapitre XII. Dans cette dernière théorie, la plus saisissante et la plus claire du calcul des probabilités, la notion de temps s'introduit nécessairement. La théorie de la spéculation peut servir d'introduction à la théorie des probabilités continues à laquelle elle a donné naissance.

224. Avant de débuter par l'étude des probabilités du premier genre à une variable, remarquons une fois pour toutes que, dans ce qui suivra, ce sera toujours la perte d'un joueur que nous considérerons comme positive; un gain sera pour nous une perte négative et s'exprimera par un nombre négatif.

225. **Probabilité élémentaire.** — Bien que ce Chapitre ait pour but l'étude des probabilités uniformes, nous établirons les formules fondamentales sans supposer l'uniformité.

Si le cas où il y a uniformité présente, au point de vue des résultats, une telle importance que nous devions lui consacrer deux Chapitres, il ne présente, au point de vue de la détermination des formules principales, aucune réelle simplification, du moins dans le cas d'une seule variable et des probabilités du premier genre. Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

226. *Le joueur A qui possède une somme infinie doit jouer μ parties; quelle est la probabilité pour que sa perte soit x?*

Nous supposerons l'indépendance mais non l'uniformité ; alors la probabilité pour que, entre les parties μ_α, μ_β, il se produise une perte y, ne dépend que des quantités μ_α, μ_β, y, elle peut donc être représentée par $\varpi_{\mu_\alpha, \mu_\beta, y}\, dy$. (Si nous supposions l'uniformité, la probabilité ne dépendrait que de $\mu_\alpha - \mu_\beta$, y. Nous ne ferons pas cette hypothèse.)

Soit $\varpi_{0,\mu,x}\, dx$ la probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie (c'est-à-dire pour que, à cette partie, elle se trouve comprise entre x et $x + dx$).

La probabilité pour que la perte soit x_1 à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie est $\varpi_{0,\mu_1,x_1}\, dx$.

La probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, cette perte ayant été x_1 à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\varpi_{0,\mu_1,x_1}\, \varpi_{\mu_1,\mu,x-x_1}\, dx_1\, dx.$$

La probabilité de la perte x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'obtient, d'après le principe des probabilités totales, en intégrant l'expression précédente pour toutes les valeurs de x_1 de $-\infty$ à $+\infty$. Cette probabilité a aussi pour expression $\varpi_{0,\mu,x}\, dx$, on a donc

$$\varpi_{0,\mu,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{0,\mu_1,x_1}\, \varpi_{\mu_1,\mu,x-x_1}\, dx_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la probabilité élémentaire du premier genre ϖdx, elle doit être vérifiée quels que soient μ_1 et μ.

Lorsque $\mu - \mu_1$ tend vers zéro, la probabilité pour que la perte y correspondant à cet intervalle soit comprise entre $-a$ et $+b$ doit tendre vers un, quelque petites que soient les quantités positives a et b. On doit donc avoir

$$\text{limite} \int_{-a}^{b} \varpi_{\mu_1,\mu,y}\, dy = 1 \qquad \text{pour} \qquad \mu - \mu_1 = 0.$$

227. L'analyse qui permet de deduire des équations précédentes l'expression de la probabilité ϖ sera exposée plus loin dans les Chapitres relatifs au rayonnement des probabilités et aux probabilités à plusieurs variables ; nous nous contenterons de faire connaître ici la

solution de ces équations, elle est

$$\varpi_{\mu_1,\mu,y} = \frac{e^{-\frac{\left[\int_{\mu_1}^{\mu} \psi'(\mu)\,d\mu + y\right]^2}{\int_{\mu_1}^{\mu} \varphi'(\mu)\,d\mu}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{\mu_1}^{\mu} \varphi'(\mu)\,d\mu}}\,dy,$$

e désignant la caractéristique des logarithmes népériens.

On peut vérifier que cette expression satisfait aux équations conditionnelles ci-dessus; la vérification repose sur l'égalité connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(az^2+bz+c)}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

elle ne présente aucune difficulté.

La probabilité a donc bien la valeur exprimée ci-dessus; $\psi'(\mu)$ et $\varphi'(\mu)$ sont des fonctions arbitraires (dont la seconde est positive); ce sont ces fonctions supposées données qui caractérisent le jeu dans l'intervalle $d\mu$ ou si l'on veut à $\mu^{\text{ième}}$ partie.

228. Nous écrirons simplement comme suit l'expression de la *probabilité élémentaire du premier genre*, ou probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie,

$$\varpi_{\mu,x} = \frac{e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx,$$

et nous considérerons les fonctions ψ et φ comme arbitraires en tenant compte quand besoin sera de leur propriété additive; les fonctions $\psi(\mu)$ et $\varphi(\mu)$ ayant respectivement pour expression

$$\int_0^{\mu} \psi'(\mu)\,d\mu, \qquad \int_0^{\mu} \varphi'(\mu)\,d\mu,$$

la valeur de ces fonctions pour μ parties est la somme des valeurs de ces fonctions pour chacune des μ parties considérée isolément. La seconde intégrale a tous ses éléments positifs, donc $\varphi(\mu)$ va sans cesse en croissant avec μ.

229. Il est facile de reconnaître ce que représentent les fonctions φ et ψ. Le gain moyen, ou espérance mathématique totale, est

$$\mathcal{E} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx.$$

Posons

$$\frac{\psi(\mu)+x}{\sqrt{\varphi(\mu)}} = \lambda,$$

l'intégrale devient

$$\mathcal{E} = -\frac{\sqrt{\varphi(\mu)}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\infty} \lambda\, e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{\psi(\mu)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

La première intégrale est nulle, la seconde a pour valeur $\sqrt{\pi}$: on a donc $\mathcal{E} = \psi(\mu)$.

La fonction ψ est donc l'espérance mathématique totale.

La valeur moyenne des carrés des pertes est

$$\mathrm{E}^2 = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx.$$

Posons

$$\frac{\psi(\mu)+x}{\sqrt{\varphi(\mu)}} = \lambda.$$

L'intégrale devient

$$\mathrm{E}^2 = \frac{[\psi(\mu)]^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda - \frac{2\psi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{\varphi(\mu)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

La première intégrale a pour valeur $\sqrt{\pi}$, la seconde est nulle ; pour obtenir la troisième on différentie par rapport à a la formule connue

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\infty} z^2 e^{-az^2}\,dz = \frac{1}{2a\sqrt{a}}.$$

On a donc

$$\mathrm{E}^2 = [\psi(\mu)]^2 + \frac{\varphi(\mu)}{2},$$

d'où

$$\varphi(\mu) = 2(\mathrm{E}^2 - \mathcal{E}^2).$$

La probabilité de la perte x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour expression

$$\frac{e^{\frac{(\mathcal{E}+x)^2}{2(E^2-\mathcal{E}^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2(E^2-\mathcal{E}^2)}}\,dx,$$

$\mathcal{E}$ étant la valeur moyenne des gains et E^2 la valeur moyenne des carrés des pertes.

La quantité $\varphi(\mu)$, pour des raisons qui seront exposées plus loin, est appelée la *fonction d'instabilité*; elle est égale, d'après ce qui précède, au double de la différence entre la valeur moyenne des carrés des pertes et le carré de la moyenne des pertes. Nous avons vu (n° 228) qu'elle est constamment positive et croissante et qu'elle se forme par addition.

230. **Applications.** — Les formules qui précèdent sont rigoureusement exactes en admettant, comme nous l'avons supposé, la continuité de la quantité μ.

Ces formules pourront donc être utilisées pour résoudre des problèmes d'un ordre de difficulté plus élevé et elles auront en outre l'avantage de s'appliquer immédiatement aux cas où la variable μ est réellement continue (ce qui a lieu, par exemple, dans la théorie de la spéculation).

Ces cas ne sont pas ceux que l'on rencontre d'ordinaire dans la réalité : en général, puisque nous ramenons toute question à un jeu, on est conduit, dans les applications, à considérer des jeux discontinus.

Nous avons vu que, dans cette hypothèse d'un jeu discontinu, la probabilité pour que la perte d'un joueur A ait pour valeur x en μ parties (le mot *partie* reprend ici son sens ordinaire) s'exprime exactement par des formules discontinues contenant des factorielles.

Il ne peut alors exister de formules continues (relativement à μ) faisant connaître la solution exacte du problème; mais si le nombre μ des parties est très grand on peut, comme approximation, assimiler ce nombre à une variable continue afin de pouvoir appliquer au problème considéré notre dernière formule dont la suite de cette étude montrera tous les avantages.

Le résultat ne pourra être rigoureusement exact, mais il sera d'autant

plus approché que le nombre des parties sera plus grand. En effet, le nombre des parties augmentant indéfiniment, on se rapprochera de plus en plus de la réalisation de l'hypothèse de la continuité absolue.

Les formules continues, lorsqu'elles sont appliquées à des jeux discontinus, sont dites *asymptotiques*. On veut exprimer par ce terme qu'elles font connaître des valeurs qui se rapprochent indéfiniment des valeurs exactes lorsque μ croît à l'infini.

Dans cette étude, nous considérerons donc deux genres de formules : les unes continues et rigoureuses, les autres approchées et asymptotiques provenant de l'application des premières aux cas où il y a en réalité discontinuité.

231. Les formules asymptotiques ne sont autres que les formules continues dans lesquelles on remplace les quantités $\mathcal{E}$ et E^2 par leur valeur déduite des conditions du jeu considéré.

Les quantités $\mathcal{E}$ et $E^2 - \mathcal{E}^2$ s'expriment facilement d'après les données du problème, c'est-à-dire d'après les conditions du jeu à chaque partie.

Le gain, pour μ parties, est la somme des gains des μ parties considérées isolément. La quantité $\mathcal{E}$, qui est la valeur moyenne des gains pour les μ parties, est donc la somme des valeurs moyennes des gains pour chacune des μ parties considérée isolément.

La quantité $E^2 - \mathcal{E}^2$, différence entre la valeur moyenne du carré d'une somme et le carré de la valeur moyenne de cette somme, est égale (n° 26), puisque les parties sont indépendantes, à la somme des quantités analogues pour chacune des μ parties considérée isolément.

On peut exprimer ce fait en disant que l'espérance totale $\mathcal{E}$ et la fonction d'instabilité $2(E^2 - \mathcal{E}^2)$ possèdent la propriété d'addition, qu'il y ait continuité ou non.

La probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est donc

$$\frac{e^{-\frac{\left(\sum_{i=1}^{i=\mu} \mathcal{E}_i + x\right)^2}{2\sum_{i=1}^{i=\mu}(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\sum_{i=1}^{i=\mu}(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2)}}\,dx;$$

$\mathcal{E}_i$ est l'espérance mathématique ou valeur moyenne du gain de la $i^{\text{ième}}$ partie considérée isolément ;

E_i^2 est la valeur moyenne des carrés des pertes de la $i^{\text{ième}}$ partie considérée isolément.

Cette formule est analogue à celle du n° 227 mais elle n'est qu'approchée alors que celle du n° 227 est exacte.

Comme dans le cas où il y a continuité, on peut désigner, dans le cas considéré, l'espérance mathématique $\mathcal{E}_i$ par ψ_i et la fonction d'instabilité $2(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2)$ par φ_i ; la formule précédente s'écrit alors

$$\frac{e^{\frac{\left[\sum_{i=1}^{i=\mu} \psi_i + x\right]^2}{\sum_{i=1}^{i=\mu} \varphi_i}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{i=\mu} \varphi_i}}\, dx.$$

Il doit être entendu une fois pour toutes que, chaque fois que les éléments $\varphi'(\mu)\, d\mu$ et $\psi'(\mu)\, d\mu$ seront remplacés par des quantités finies et les intégrales $\varphi(\mu)$ et $\psi(\mu)$ par des sommes, les formules ne seront qu'approchées et applicables seulement dans le cas où le nombre des parties est très grand.

La formule précédente montre que la probabilité est indépendante de l'ordre des parties.

232. Si, par exemple, à chaque partie, deux alternatives sont seules possibles ; si à la $i^{\text{ième}}$ partie le joueur a probabilité p_i de gagner la somme α_i et probabilité q_i de perdre la somme β_i, on a

$$\mathcal{E}_i = \alpha_i p_i - \beta_i q_i, \qquad E_i^2 = \alpha_i^2 p_i + \beta_i^2 q_i,$$

d'où

$$E_i^2 - \mathcal{E}_i^2 = p_i q_i (\alpha_i + \beta_i)^2.$$

la probabilité de la perte x en μ parties est alors

$$\frac{e^{-\frac{[\sum (\alpha_i p_i - \beta_i q_i) + x]^2}{2\sum p_i q_i (\alpha_i + \beta_i)^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\sum p_i q_i (\alpha_i + \beta_i)^2}}\, dx.$$

233. On peut supposer aussi qu'une infinité d'alternatives soit possible à chaque partie; que, par exemple, à la $i^{\text{ième}}$ partie il y ait probabilité $\zeta_i(y)\,dy$ pour que le joueur perde une somme y; y pouvant par exemple varier de $-\varepsilon_i$ à $+\varepsilon'_i$. On a alors

$$\int_{-\varepsilon_i}^{+\varepsilon'_i} \zeta(y)\,dy = 1, \qquad \mathcal{E}_i = -\int_{-\varepsilon_i}^{+\varepsilon'_i} y\,\zeta_i(y)\,dy, \qquad \mathrm{E}_i^2 = \int_{-\varepsilon_i}^{+\varepsilon'_i} y^2\zeta_i(y)\,dy.$$

234. Nos formules sont mathématiquement exactes en supposant μ continu; il y a un cas où elles sont encore exactes lorsque μ est discontinu.

Si, pour chaque partie, la probabilité de la perte y est donnée par une expression de la forme

$$\zeta_i(y) = \frac{e^{-\frac{(\psi_i+y)^2}{\varphi_i}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_i}}\,dy,$$

la probabilité pour que, en μ parties (μ étant un nombre quelconque, grand ou petit), la perte soit x est exactement

$$\frac{e^{-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{i=\mu}\psi_i+x\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{i=\mu}\varphi_i}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{i=\mu}\varphi_i}}\,dx.$$

C'est ce que montre l'analyse du n° 227.

235. **Cas où il y a uniformité.** — On dit qu'il y a uniformité lorsque le jeu est constamment identique à lui-même. Les fonctions $\psi(\mu)$ et $\varphi(\mu)$ qui caractérisent le jeu sont alors de la forme $\psi(\mu) = \mu\psi_1$ et $\varphi(\mu) = \mu\varphi_1$, ψ_1 et φ_1 étant des coefficients qui désignent l'espérance et la fonction d'instabilité correspondant au cas où $\mu = 1$. L'unité adoptée pour la variable μ peut être quelconque.

La probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire la *probabilité élémentaire du premier genre*, est donc exprimée par la

formule

$$\frac{e^{-\frac{(\mu\psi_1+x)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx.$$

Cette expression est exacte en supposant la continuité.

L'espérance pour une partie ou pour un élément $d\mu$ est $\psi'(\mu)\,d\mu$ dans le cas général et $\psi_1\,d\mu$ dans le cas de l'uniformité; dans ce même cas, la fonction d'instabilité pour une partie est $\varphi_1\,d\mu$. Ces fonctions sont donc proportionnelles à ψ_1 et à φ_1. C'est pour cette raison que, dans un but de simplification, nous dirons, lorsqu'il y aura uniformité, que le jeu est caractérisé par l'espérance ψ_1 et par la fonction d'instabilité φ_1 relatives à une partie.

236. Si μ est discontinu, la formule du n° 231 fait connaître la valeur approchée et asymptotique de la probabilité pour que la perte soit x en μ parties : c'est

$$\frac{e^{-\frac{(\mu\mathcal{E}_1+x)^2}{2\mu(E_1^2-\mathcal{E}_1^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu(E_1^2-\mathcal{E}_1^2)}}\,dx,$$

$\mathcal{E}_1$ désignant la valeur moyenne des gains (ou espérance mathématique) et E_1^2 la valeur moyenne des carrés des pertes pour une partie.

Cette dernière formule ne doit être appliquée que si μ est un grand nombre.

On peut désigner $\mathcal{E}_1$ par ψ_1, $2(E_1^2-\mathcal{E}_1^2)$ par φ_1 et employer dans les deux cas la formule du n° 235 en se rappelant qu'elle est exacte ou approchée suivant que μ est continu ou discontinu.

237. Si, par exemple, à chaque partie, deux alternatives sont seules possibles, le gain α de probabilité p et la perte β de probabilité q, on a

$$\mathcal{E}_1=\alpha p-\beta q,\qquad E_1^2=\alpha^2 p+\beta^2 q.$$

La perte x a donc pour probabilité

$$\frac{e^{-\frac{[\mu(\alpha p-\beta q)+x]^2}{2\mu pq(\alpha+\beta)^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq(\alpha+\beta)^2}}\,dx.$$

238. On peut supposer aussi qu'une infinité d'alternatives soit possible à chaque partie; que par exemple, à chaque partie, il y ait probabilité $\zeta(y)\,dy$ pour que le joueur perde une somme y; y pouvant, par exemple, varier de $-\varepsilon_1$ à $+\varepsilon_2$. On a alors

$$\int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_2} \zeta(y)\,dy = 1, \qquad \mathcal{E}_1 = -\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} y\zeta(y)\,dy, \qquad \mathrm{E}_1^2 = \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} y^2\zeta(y)\,dy.$$

239. Cas où il y a symétrie. — Lorsque le jeu est équitable, $\psi_1 = 0$ et la probabilité de la perte x a pour valeur

$$\varpi_{\mu,x} = \frac{e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx$$

Si l'on change x en $-x$, cette formule ne change pas. Donc, lorsqu'il y a continuité, le fait pour un jeu d'être équitable a pour conséquence la symétrie de la probabilité.

240. Courbe de probabilité. — La fonction

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}$$

peut se représenter par une courbe dont l'ordonnée est maxima à l'origine et qui présente deux points d'inflexion pour

$$x = \pm\sqrt{\frac{\mu\varphi_1}{2}}.$$

La probabilité de la perte x est une fonction de μ, elle croît jusqu'à une certaine valeur de μ et décroît ensuite. Sa dérivée par rapport à μ s'annule lorsque $x = \sqrt{\frac{\mu\varphi_1}{2}}$. La probabilité de la perte x est donc maxima quand elle correspond à un point d'inflexion de la courbe des probabilités.

241. Probabilité totale. — La probabilité pour que la perte soit

comprise entre zéro et x est

$$\int_0^x \varpi_{\mu,x}\,dx = \int_0^x \frac{e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx.$$

En posant

$$\frac{x}{\sqrt{\mu\varphi_1}} = \lambda,$$

elle devient

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que la perte soit comprise entre zéro et x. Elle est immédiatement calculable par les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-y^2}\,dy$$

qui sont reproduites à la fin du Volume.

La probabilité considérée a pour valeur

$$\frac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right).$$

La probabilité pour que la perte soit comprise entre $\pm x$ est

$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right).$$

Si μ croît indéfiniment, cette probabilité tend vers zéro.

242. La probabilité pour que la perte soit supérieure à x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, ou *probabilité totale du premier genre*, a pour valeur

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

ou

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right).$$

Quand μ tend vers l'infini, cette probabilité tend vers $\frac{1}{2}$.

Quand à chaque partie deux alternatives sont seules possibles, le gain α de probabilité p et la perte β de probabilité q, la dernière formule se réduit à la suivante

$$\varphi_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu\alpha\beta}}\right).$$

243. **Écart moyen.** — La probabilité étant symétrique de part et d'autre de la probabilité maxima ($x = 0$), on dit que l'écart est x quand la perte ou le gain ont pour valeur x. La probabilité de l'écart x positif et négatif est donc

$$\frac{2e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}dx.$$

L'écart moyen, ou valeur moyenne de l'écart considéré en valeur absolue, est

$$\int_0^\infty \frac{2xe^{-\frac{x^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}dx.$$

Cette intégrale est de la forme connue

$$\int_a^b ye^{-y^2}dy = -\frac{e^{-b^2}}{2} + \frac{e^{-a^2}}{2},$$

elle se réduit donc à

$$\sqrt{\frac{\mu\varphi_1}{\pi}} = 0.5642\ldots\sqrt{\mu\varphi_1}.$$

L'écart moyen est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties.

Si deux alternatives sont seules possibles à chaque partie, le gain α de probabilité p et la perte β de probabilité q, l'écart moyen a pour valeur

$$\sqrt{\frac{2\mu\alpha\beta}{\pi}} = 0,5642\ldots\sqrt{2\mu\alpha\beta}.$$

244. **Écart quadratique.** — On nomme *écart moyen quadratique*

la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\mu\varphi_1}}{\sqrt{2}} = 0,7071\ldots\sqrt{\mu\varphi_1}.$$

L'écart quadratique est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties.

Si l'on compare ce résultat à celui qui a été obtenu au n° 240, on voit que l'écart quadratique correspond aux points d'inflexion de la courbe de probabilité.

245. **Écart probable.** — C'est l'écart qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassé à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, sa valeur x vérifie donc l'équation

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = 1 - \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right) = \frac{1}{2},$$

on en déduit

$$x = 0,4769\ldots\sqrt{\mu\varphi_1}.$$

L'écart probable est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties.

Le rapport de l'écart probable à l'écart moyen est 0,8463.

246. **Écarts isoprobables.** — Plus généralement, considérons un intervalle $\pm x$ tel que la probabilité pour que l'écart soit inférieur à x soit égale à une quantité donnée u; on doit avoir

$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right) = u.$$

L'intervalle $\pm x$ est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties.

Les écarts croissent proportionnellement à la racine carrée du nombre des parties.

En valeur relative ils décroissent donc et tendent vers zéro.

La fonction $\mu\varphi_1$ dont la racine carrée mesure l'amplitude des écarts est nommée pour cette raison la *fonction d'instabilité* relative aux μ parties. φ_1 est la fonction d'instabilité relative à une partie.

247. Cas général. — Lorsque le jeu n'est pas supposé équitable, la probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour valeur (n° 235)

$$\varpi_{\mu,x} = \frac{e^{-\frac{(\mu\psi_1+x)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx.$$

C'est la probabilité élémentaire du premier genre. La *probabilité du premier genre* $\mathfrak{P}_{\mu,x}$ est la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte soit supérieure à x.

On a donc

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\mu\psi_1+x)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx.$$

En posant

$$\frac{\mu\psi_1+x}{\sqrt{\mu\varphi_1}} = \lambda,$$

on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\mu\psi_1+x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Si $\mu\psi_1 + x$ est positif, on peut écrire

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\mu\psi_1+x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Si $\mu\psi_1 + x$ est négatif, on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\frac{\mu\psi_1+x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

La probabilité du premier genre $\mathfrak{P}_{\mu,x}$ se calcule donc toujours aisément par les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y} e^{-y^2}\,dy,$$

qui sont reproduites à la fin du Volume.

Si, par exemple, $\mu\psi_1 + x$ est positif, on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{\mu\psi_1+x}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right).$$

248. La probabilité totale de perte correspond à $x=0$, elle a pour valeur

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\psi_1\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}d\lambda=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{\psi_1\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varphi_1}}\right),$$

si le jeu est avantageux, c'est-à-dire si ψ_1 est positif. Cette probabilité tend vers zéro quand μ augmente indéfiniment.

Si, au contraire, le jeu est désavantageux, ψ_1 est négatif et la probabilité totale de perte,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\psi_1\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}d\lambda=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{-\psi_1\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varphi_1}}\right),$$

tend vers l'unité quand μ augmente.

A la longue, un jeu avantageux conduit nécessairement à un gain, un jeu désavantageux conduit nécessairement à une perte. Ces résultats sont évidents.

249. Revenons à la probabilité élémentaire, c'est-à-dire à la probabilité de la perte x, elle a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{(\mu\psi_1+x)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx.$$

La perte la plus probable est celle qui rend maxima cette expression : c'est donc la perte x telle que

$$\mu\psi_1+x=0;\qquad \text{d'où}\qquad x=-\mu\psi_1.$$

La perte probable est définie par l'égalité $\mathcal{P}_{\mu,x}=\frac{1}{2}$, dont on déduit

$$x=-\mu\psi_1.$$

La valeur moyenne de la perte x est par définition (nº 229)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,e^{-\frac{(\mu\psi_1+x)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx=-\mu\psi_1.$$

250. Ainsi la quantité $-\mu\psi_1$ est en même temps la perte moyenne, la perte probable et la perte la plus probable.

En représentant les autres pertes par leurs différences x' à la perte moyenne, on a

$$\mu\psi_1 + x = x'.$$

La probabilité relative à x' est par suite

$$\frac{e^{-\frac{x'^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx'.$$

La distribution des probabilités de part et d'autre de la probabilité maxima, lorsque le jeu n'est pas équitable, suit donc une loi analogue à celle qui est relative au cas des jeux équitables.

Tout ce qui a été dit sur les écarts et la représentation géométrique des probabilités est applicable aux jeux non équitables à la condition de prendre la probabilité maxima pour origine. Par exemple, la courbe de probabilité, en même temps qu'elle se déforme suivant les lois que nous avons étudiées, est animée d'un mouvement d'ensemble qui est uniforme si la variable μ est assimilée au temps.

Ainsi en résumé :

La perte moyenne

$$-\mu\psi_1$$

est proportionnelle au nombre des parties jouées ; les écarts en plus ou en moins sont proportionnels à la racine carrée du même nombre.

Les écarts diminuent donc *relativement* à la perte moyenne

251. **Étude de l'espérance mathématique.** — L'espérance mathématique totale a pour expression (n° 229)

$$\mathcal{E} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{-\frac{(\mu\psi_1+x)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dx = \mu\psi_1,$$

elle est proportionnelle au nombre des parties jouées, résultat évident.

Supposons que le jeu soit désavantageux, ψ_1 est négatif, l'espérance

positive est

$$\mathcal{E}' = \int_0^\infty \frac{x\, e^{-\frac{(-\mu\psi_1 - x)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\, dx.$$

En posant

$$\frac{\mu\psi_1 + x}{\sqrt{\mu\varphi_1}} = \lambda,$$

on a

$$\mathcal{E}' = \frac{\sqrt{\mu\varphi_1}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^\infty \lambda e^{-\lambda^2} d\lambda - \frac{\mu\psi_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\mu\psi}{\sqrt{\mu\varphi}}}^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

ou, en effectuant la première intégration,

$$\mathcal{E}' = \frac{\sqrt{\mu\varphi_1}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\mu^2\psi_1^2}{\mu\varphi_1}} - \frac{\mu\psi_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

ou encore

$$\mathcal{E}' = \frac{\sqrt{\mu\varphi_1}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\mu\psi_1^2}{\varphi_1}} + \mu\psi_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{-\mu\psi_1}{\sqrt{\varphi_1}}\right) \right].$$

Cette dernière formule permet de calculer facilement l'espérance positive $\mathcal{E}'$.

L'espérance négative $\mathcal{E}''$ s'obtient par la formule

$$\mathcal{E}'' = \mathcal{E} - \mathcal{E}' = \mu\psi_1 - \mathcal{E}'.$$

252. La valeur moyenne relative du gain, c'est-à-dire la valeur moyenne du gain quand gain il y a, est égale au quotient de $\mathcal{E}'$ par la probabilité pour qu'il y ait gain (n° 248); cette valeur moyenne est donc

$$\frac{\mathcal{E}'}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{-\psi_1\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varphi_1}}\right)}.$$

La valeur moyenne relative de la perte est de même

$$\frac{-\mathcal{E}''}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{-\psi_1\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varphi_1}}\right)}.$$

253. Revenons à l'espérance positive

$$\mathcal{E}' = \frac{\sqrt{\mu\varphi_1}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\mu\psi_1^2}{\varphi_1}} - \frac{\mu\psi_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\psi_1\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Cette espérance part de zéro avec μ, elle croît ensuite jusqu'à un certain maximum et, μ tendant vers l'infini, elle tend vers zéro.

Lorsqu'un jeu est désavantageux, si l'on considère un nombre de plus en plus grand de parties, l'espérance positive finit par décroître, même en valeur absolue, et elle a pour limite zéro.

La valeur de l'espérance positive d'un jeu avantageux tend, lorsque μ croît indéfiniment, vers la quantité $\mu\psi_1$.

254. Lorsque le jeu est équitable, $\psi_1 = 0$, toutes les formules précédentes se simplifient, l'espérance totale est nulle, les espérances positive et négative ont pour valeur absolue

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\varphi_1}{\pi}},$$

elles sont proportionnelles à la racine carrée du nombre des parties.

La valeur moyenne relative du gain ou de la perte est

$$\sqrt{\frac{\mu\varphi_1}{\pi}}.$$

Si, par exemple, à chaque partie, deux alternatives sont seules possibles, le gain α de probabilité p et la perte β de probabilité q, les espérances positive et négative ont pour valeur absolue

$$\frac{\sqrt{2\mu\alpha\beta}}{2\sqrt{\pi}},$$

elles sont proportionnelles au produit des mises.

255. **Quelques exemples.** — Supposons que, pour chaque partie, un joueur ait une chance sur dix de gagner et neuf chances sur dix de perdre.

Il joue 1 fr par partie, et s'il gagne il touche 9 fr (son bénéfice est

de 8 fr puisque sa mise est de 1 fr). Dans le jeu considéré (n° 237) on a donc

$$p = \frac{1}{10}, \qquad q = \frac{9}{10}, \qquad \alpha = 8, \qquad \beta = 1.$$

L'espérance positive pour une partie est $\frac{8}{10}$ ou 80^c, l'espérance négative est $\frac{9}{10}$ ou 90^c.

La perte moyenne pour une partie est donc 10^c.

256. Supposons maintenant que l'on joue deux parties; la probabilité de les gagner toutes deux est $p^2 = \frac{1}{100}$, le bénéfice correspondant est 16 fr. La probabilité de gagner une partie est $2pq = \frac{18}{100}$, le bénéfice correspondant est 7 fr; enfin le joueur a 81 chances sur 100 de perdre les deux parties.

La probabilité totale de réussite est $\frac{1}{100} + \frac{18}{100} = \frac{19}{100}$, elle a donc augmenté.

L'espérance positive est $\frac{16}{100} + \frac{18.7}{100} = \frac{142}{100}\cdot$ L'espérance négative est $\frac{2 \times 81}{100} = \frac{162}{100}\cdot$ L'espérance totale du jeu a donc pour valeur $-$ 20^c.

257. Si l'on jouait 500 parties, la perte moyenne serait

$$-\mu(\alpha p - \beta q) = \frac{500}{10} = 50.$$

Cette perte moyenne de 50 fr correspond au gain de 50 parties; l'écart moyen en plus ou en moins correspond à 48 fr. La probabilité de gain est 0,20.

L'espérance positive est égale à 7 fr : c'est contre cette somme que le joueur pourrait abandonner sa chance de bénéfice.

L'espérance négative est 57 fr.

La probabilité de réaliser un bénéfice de quelque importance est très faible, le joueur a moins de 6 chances sur 100 de gagner plus de 50 fr.

258. Supposons qu'on joue 50000 parties, la perte moyenne est

5000 fr, avec un écart moyen en plus ou en moins de 480 fr; la probabilité de gain et l'espérance positive sont d'une excessive petitesse; on n'a que 5 chances sur 100 de perdre moins de 4000 fr.

Cet exemple suffit pour montrer que le moindre désavantage dans un jeu rend impossible à la longue toute chance de bénéfice; il montre aussi qu'on peut prévoir la perte avec une erreur relative de plus en plus petite.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES ÉPREUVES RÉPÉTÉES UNIFORMES.

259. Le terme *épreuves répétées* a pour nous un sens spécial : nous disons qu'un problème est relatif à des épreuves répétées quand il n'étudie explicitement que des probabilités ou, en d'autres termes, quand il ne consiste pas à traiter une question explicitement relative à un jeu.

260. *La probabilité d'un événement est p : quelle est la probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves ?*

Supposons qu'un joueur A perde 1 fr chaque fois que l'événement se produit et qu'il ne perde rien quand l'événement ne se produit pas. La probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves est la probabilité pour que le joueur perde z francs en jouant μ parties, probabilité qui est exprimée par la formule (nº 235)

$$\frac{e^{-\frac{(\mu\mathcal{E}_1+z)^2}{2\mu(E_1^2-\mathcal{E}_1^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu(E_1^2-\mathcal{E}_1^2)}}\,dz.$$

Dans le cas considéré

$$\mathcal{E}_1 = -p,$$

$$2(E_1^2-\mathcal{E}_1^2) = 2(p-p^2) = 2pq,$$

en posant

$$q = 1-p.$$

La probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves

est donc

$$\frac{e^{-\frac{(z-\mu p)^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dz.$$

Il faut remarquer que cette formule établie en supposant la continuité n'est applicable que si μ est un grand nombre.

261. La valeur la plus probable du nombre des arrivées de l'événement est μp.

La valeur moyenne du même nombre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z e^{-\frac{(z-\mu p)^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dz = \mu p.$$

La valeur probable du même nombre est encore μp. En effet, si, dans l'intégrale

$$\int_{\mu p}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(z-\mu p)^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dz,$$

on pose

$$z - \mu p = \sqrt{2\mu pq}\,\lambda,$$

elle devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2}\cdot$$

262. La valeur μp est la valeur moyenne, la valeur probable et la valeur la plus probable du nombre des arrivées de l'événement. Nous représenterons les autres valeurs par leur différence à μp; nous poserons donc

$$z = \mu p + x.$$

La probabilité pour que z soit compris entre z et $z + dz$ étant

$$\frac{e^{-\frac{(z-\mu p)^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dz,$$

la probabilité pour que x soit compris entre x et $x + dx$ est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dx.$$

La quantité x est dite l'*écart*. La dernière formule exprime la probabilité pour que l'écart soit $+x$ ou pour qu'il soit $-x$. La probabilité pour que l'écart soit $\pm x$ est le double de la quantité précédente.

En résumé :

La probabilité d'un événement étant p, l'hypothèse la plus probable en faisant μ épreuves identiques correspond au nombre μp d'arrivées de cet événement.

La probabilité d'un écart x, c'est-à-dire la probabilité pour que le nombre d'arrivées de cet événement soit compris entre $\mu p + x$ et $\mu p + x + dx$ est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dx.$$

263. **Probabilité totale.** — La formule qui fait connaître la probabilité des écarts est analogue à celle qui est relative aux jeux équitables; elle est susceptible de la même représentation géométrique (n° 240).

La probabilité pour que l'écart soit compris entre zéro et x est

$$\int_0^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,dx.$$

En posant

$$\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}} = \lambda,$$

l'intégrale devient

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right).$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que l'écart soit compris entre zéro et x.

La probabilité pour qu'il soit compris entre $\pm x$ serait

$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right).$$

Cette probabilité tend vers zéro lorsque μ augmente indéfiniment.

264. La probabilité

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right)$$

pour que l'écart soit plus grand que x (dans un seul sens) croît constamment avec μ. Si μ était infini, elle serait également à $\frac{1}{2}$, résultat évident.

265. **Écart moyen.** — On appelle *écart moyen* la valeur moyenne de l'écart considéré en valeur absolue, c'est-à-dire la quantité

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dx = \frac{\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642\ldots\sqrt{2\mu pq}.$$

L'écart moyen est proportionnel à la racine carrée du nombre des épreuves.

266. **Écart quadratique.** — L'écart moyen quadratique est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts :

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\mu pq}.$$

L'écart quadratique est proportionnel à la racine carrée du nombre des épreuves; il correspond aux points d'inflexion de la courbe de probabilité

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}.$$

267. **Écart probable.** — C'est l'écart qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassé ; sa valeur x vérifie l'équation

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right) = \frac{1}{4};$$

on en déduit

$$x = 0{,}47693\ldots\sqrt{2\mu pq}.$$

L'écart probable est proportionnel à la racine carrée du nombre des épreuves.

Le rapport de l'écart probable à l'écart moyen est 0,8463.

268. **Écarts isoprobables.** — Plus généralement considérons un intervalle $\pm x$ tel que la probabilité pour que l'écart soit inférieur à x soit égale à une quantité donnée u ; on doit avoir

$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right) = u;$$

l'intervalle $\pm x$ est donc proportionnel à la racine carrée du nombre des épreuves.

Les écarts croissent proportionnellement à la racine carrée du nombre des épreuves. En valeur relative ils décroissent donc et tendent vers zéro.

C'est, du moins dans son esprit, le théorème de Jacques Bernoulli. On énonce généralement ce théorème en disant que, le nombre des épreuves croissant indéfiniment, le nombre des arrivées de l'événement s'écarte relativement de moins en moins de sa valeur la plus probable μp.

269. Ce qui précède permet de se former une idée absolument nette de la variation des probabilités.

Qu'il s'agisse d'écarts relatifs à la théorie des épreuves répétées ou à la théorie du jeu, la distribution des probabilités est représentée par la courbe

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}.$$

La quantité μ croissant, l'ordonnée maxima de la courbe diminue proportionnellement à $\sqrt{\mu}$. Les écarts isoprobables, c'est-à-dire ceux qui contiennent toujours la même aire, croissent proportionnellement à $\sqrt{\mu}$. Les points d'inflexion de la courbe s'écartent proportionnellement à $\sqrt{\mu}$.

Les ordonnées de la courbe tendent constamment à s'égaliser, et la

courbe devient presque parallèle à l'axe des x et infiniment proche de cet axe quand μ augmente indéfiniment.

Si le jeu n'est pas équitable, la courbe de probabilité se déforme toujours de la même manière, mais elle est en même temps animée d'un mouvement de translation le long de l'axe des x. Ce mouvement est uniforme si l'on assimile la variable μ au temps.

CHAPITRE VIII.

PROBABILITÉS CONTINUES NON UNIFORMES.

270. Reprenons le cas de non-uniformité; la probabilité de la perte x en μ parties est exprimée par la formule (228)

$$\frac{e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx,$$

exacte lorsque μ est continu.

Lorsque μ est discontinu, la probabilité de la perte x a pour valeur approchée (n° 231)

$$\frac{e^{-\frac{[\Sigma \mathcal{E}_i + x]^2}{(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2)}}\,dx.$$

271. **Cas où il y a symétrie.** — Le jeu peut être équitable dans son ensemble; il suffit pour cela que $\psi(\mu)$ soit nul. Si à chaque partie le jeu est équitable, il est nécessairement équitable dans son ensemble.

La probabilité de la perte x a pour valeur

$$\varpi_{\mu,x} = \frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx.$$

Si l'on change x en $-x$, la formule ne change pas; donc, si l'on suppose la continuité, le fait pour un jeu d'être équitable a pour conséquence la symétrie des probabilités.

La variation de la probabilité peut se représenter par la même courbe que dans le cas de l'uniformité (n° 240).

272. La probabilité $\mathfrak{P}_{\mu,x}$ pour que la perte soit supérieure à x ou probabilité du premier genre est

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx.$$

En posant

$$\frac{x^2}{\varphi(\mu)} = \lambda^2,$$

on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Cette probabilité se calcule donc facilement par les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-y^2}\,dy,$$

qui sont reproduites à la fin du Volume.

On a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Theta\left[\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\Sigma E_i^2}}\right).$$

273. On obtient la valeur de l'écart moyen comme dans le cas du jeu uniforme

$$\sqrt{\frac{\varphi(\mu)}{\pi}} = 0{,}5642\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}.$$

L'écart quadratique est de même

$$\sqrt{\frac{\varphi(\mu)}{2}} = 0{,}7071\ldots\sqrt{\varphi(\mu)},$$

et l'écart probable est

$$0{,}4769362762\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}.$$

274. Plus généralement considérons l'intervalle $\pm x$ tel que la probabilité pour que l'écart soit inférieur à x, soit égal à une quantité donnée u; on doit avoir

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \Theta\left[\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}\right] = u.$$

Cet intervalle x, si la probabilité est constante, varie proportionnellement à la racine carrée de la fonction d'instabilité; donc :

Les écarts croissent proportionnellement à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

C'est à cette propriété que la fonction d'instabilité doit son nom.

La fonction d'instabilité formée par addition de quantités toujours positives va sans cesse en croissant avec le nombre des parties; donc les écarts vont constamment en croissant.

Si, pour μ infini, $\varphi(\mu)$ est infini, les écarts isoprobables croissent indéfiniment.

Si, au contraire, $\varphi(\mu)$ tend vers une limite finie, la loi de la distribution des probabilités s'approche indéfiniment de la loi asymptote.

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(\infty)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\infty)}}\,dx.$$

275. Dans le cas de non-uniformité, la probabilité peut être représentée par une courbe. Géométriquement, cette courbe est la même que dans le cas de l'uniformité, mais la loi de la déformation de cette courbe est arbitraire puisque $\varphi(\mu)$ est arbitraire. Toutefois, la fonction $\varphi(\mu)$ ne pouvant être que croissante, la courbe ne peut repasser par ses états antérieurs, et, après s'être dilatée, elle ne peut se contracter.

276. Les écarts isoprobables et l'écart moyen obéissant à la même loi, on peut exprimer ces écarts en prenant l'un d'eux pour unité. Par exemple si l'on prend pour unité l'écart probable, la probabilité pour que l'écart représenté par deux soit dépassé dans les deux sens est 0,1773, d'après la table de la fonction Θ. La probabilité pour que l'écart représenté par trois soit dépassé est de même 0,0432.... Il n'y

a pas une chance sur dix millions pour que l'écart soit supérieur à huit fois l'écart probable.

277. **Cas général.** — La probabilité $\varpi_{\mu,x}dx$ est la probabilité élémentaire du premier genre (nº 228); la *probabilité du premier genre*, c'est-à-dire la probabilité pour que la perte soit supérieure à x, est

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx.$$

En posant

$$\frac{\psi(\mu)+x}{\sqrt{\varphi(\mu)}} = \lambda,$$

on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\psi(\mu)+x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Si $\psi(\mu)+x$ est positif, on peut écrire

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\psi(\mu)+x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Si $\psi(\mu)+x$ est négatif, on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\frac{\psi(\mu)+x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

La probabilité du premier genre $\mathfrak{P}_{\mu,x}$ se calcule donc toujours aisément par les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-y^2}\,dy.$$

278. Reprenons la formule

$$\frac{e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx = \frac{e^{-\frac{(\mathfrak{C}+x)^2}{2(\mathrm{E}^2-\mathfrak{C}^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2(\mathrm{E}^2-\mathfrak{C}^2)}}\,dx,$$

qui exprime la probabilité de la perte x. La perte probable est $-\psi(\mu)$,

la perte la plus probable est $-\psi(\mu)$, et la perte moyenne est encore $-\psi(\mu)$. Représentons les autres pertes par leurs différences x' à la perte moyenne; nous aurons

$$-\psi(\mu) + x' = x$$

la probabilité relative à x' est par suite

$$\frac{e^{-\frac{x'^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx'.$$

La distribution des probabilités de part et d'autre de la probabilité maxima suit donc une loi analogue à celles que nous avons étudiées précédemment.

La probabilité pour que la perte soit comprise entre $\pm x'$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x'}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \Theta\left[\frac{x'}{\sqrt{\varphi(\mu)}}\right];$$

cet intervalle x', si la probabilité est constante, varie proportionnellement à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

En résumé, *le gain moyen est égal à l'espérance mathématique totale; les écarts en plus ou en moins sont proportionnels à la racine carrée de la fonction d'instabilité.*

La racine carrée de la fonction $\varphi(\mu)$ mesure donc l'amplitude des écarts ou l'instabilité, et c'est de cette propriété que la fonction a tiré son nom.

La fonction d'instabilité formée par addition de quantités toujours positives va sans cesse en croissant avec le nombre des parties.

Les écarts de part et d'autre de la perte moyenne vont donc sans cesse en croissant.

Ils croissent à l'infini ou tendent vers une valeur asymptote suivant que $\varphi(\mu)$ croît vers l'infini avec μ ou tend vers une limite.

279. **Étude de l'espérance mathématique.** — Les problèmes relatifs à l'espérance mathématique se traitent comme dans le cas où il y a uniformité (n° 251); l'espérance totale $\mathcal{E}$ est $\psi(\mu)$. Si le jeu est

désavantageux, l'espérance positive $\mathcal{E}'$ a pour valeur

$$\mathcal{E}' = \frac{\sqrt{\varphi(\mu)}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{[\psi(\mu)]^2}{\varphi(\mu)}} - \frac{\psi(\mu)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\psi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

L'espérance négative $\mathcal{E}''$ est

$$\mathcal{E}'' = \mathcal{E} - \mathcal{E}' = \psi(\mu) - \mathcal{E}'.$$

μ augmentant indéfiniment, l'espérance positive tend vers zéro si $\frac{\psi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}$ tend vers l'infini. Si $\psi(\mu)$ et $\varphi(\mu)$ tendent vers des limites finies, l'espérance positive se rapproche indéfiniment de la valeur asymptote

$$\frac{\sqrt{\varphi(\infty)}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{[\psi(\infty)]^2}{\varphi(\infty)}} - \frac{\psi(\infty)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\psi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

280. Généralisation de la théorie des épreuves répétées. — *La probabilité d'un événement est p_1 à la première épreuve, p_2 à la seconde, p_3 à la troisième, etc. Quelle est la probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves?*

Supposons qu'un joueur A perde 1 fr chaque fois que l'événement se produit et qu'il ne perde rien quand l'événement ne se produit pas. La probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves est égale à la probabilité pour que le joueur perde z francs en jouant μ parties, probabilité qui est exprimée par la formule (n° 231).

$$\frac{e^{-\frac{(z+\Sigma\mathcal{E}_i)^2}{2\Sigma(E_i^2-\mathcal{E}_i^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma(E_i^2+\mathcal{E}_i^2)}} dz.$$

Dans le cas considéré

$$\mathcal{E}_i = -p_i, \qquad \Sigma\mathcal{E}_i = -\Sigma p_i, \qquad E_i^2 = p_i,$$
$$2\Sigma(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2) = 2\Sigma(p_i^2 - p_i) = 2\Sigma p_i q_i,$$

en posant $q = 1 - p$.

Les sommations sont relatives aux valeurs 1, 2, ..., μ de i.

La probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves

est donc

$$\frac{e^{-\frac{(z-\Sigma p)^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dz.$$

Il faut remarquer que cette formule, établie en supposant la continuité, n'est applicable que si μ est un grand nombre.

281. La valeur la plus probable du nombre des arrivées de l'événement est Σp.

La valeur moyenne du même nombre est

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,e^{-\frac{(z-\Sigma p)^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dz=\Sigma p;$$

la valeur probable du même nombre est encore Σp. En effet, si dans l'intégrale

$$\int_{\Sigma p}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(z-\Sigma p)^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dz$$

on pose

$$z-\Sigma p=\sqrt{2\Sigma pq}\,\lambda,$$

elle se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2}\,d\lambda=\frac{1}{2}.$$

282. La valeur Σp est la valeur moyenne, la valeur probable et la valeur la plus probable du nombre des arrivées de l'événement. Nous représenterons les autres valeurs par leur différence à Σp; nous poserons donc

$$z=\Sigma p+x.$$

La probabilité pour que z soit compris entre z et $z+dz$ étant

$$\frac{e^{-\frac{(z-\Sigma p)^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dz,$$

la probabilité pour que x soit compris entre x et $x+dx$ est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}dx,$$

la quantité x est dite l'*écart*. La dernière formule exprime la probabilité pour que l'écart soit $+x$ ou pour qu'il soit $-x$. La probabilité pour que l'écart soit $\pm x$ est le double de la quantité précédente.

En résumé :

L'hypothèse la plus probable correspond au nombre Σp d'arrivées de l'événement. La probabilité d'un écart x, c'est-à-dire la probabilité pour que le nombre d'arrivées de cet événement soit compris entre $\Sigma p+x$ et $\Sigma p+x+dx$ est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}dx.$$

283. La probabilité pour que l'écart soit compris entre $\pm x$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2}d\lambda = \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\Sigma pq}}\right).$$

Cette quantité tend vers zéro lorsque le nombre des épreuves augmente, sauf dans le cas où Σpq ne croît pas jusqu'à l'infini.

284. La probabilité

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2}d\lambda = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\Sigma pq}}\right)$$

pour que l'écart soit supérieur à x (dans un seul sens) serait égale à $\frac{1}{2}$ si le nombre des épreuves augmentait indéfiniment, sauf dans le cas où Σpq ne croîtrait pas jusqu'à l'infini.

285. L'écart moyen a pour valeur

$$\sqrt{\frac{2\Sigma pq}{\pi}} = 0,5642\ldots\sqrt{2\Sigma pq},$$

l'écart quadratique est $\sqrt{\Sigma pq}$ et l'écart probable est $0,47693\ldots\sqrt{2\Sigma pq}$.

Plus généralement, considérons l'écart $\pm x$ tel que la probabilité pour que l'écart soit inférieur à x soit égale à une quantité donnée u; on doit avoir

$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\Sigma pq}}\right) = u.$$

L'intervalle $\pm x$ est proportionnel à la racine carrée de Σpq. Or Σpq ne peut que croître avec le nombre des épreuves; donc :

Les écarts vont en croissant.

Si le nombre des épreuves augmente à l'infini, deux cas sont à distinguer :

Si Σpq croît indéfiniment, les écarts isoprobables augmentent à l'infini et ils décroissent indéfiniment en valeur relative.

Pour le démontrer, il faut prouver que Σp devient infiniment grand relativement à $\sqrt{\Sigma pq}$.

Puisque $\sqrt{\Sigma pq}$ devient infini, Σpq devient infiniment grand par rapport à lui; or l'inégalité

$$\Sigma pq = \Sigma p(1-p) = \Sigma p - \Sigma p^2 < \Sigma p$$

montre que Σp est supérieur à Σpq, donc $\sqrt{\Sigma pq}$ devient infiniment petit relativement à Σp.

Les écarts étant proportionnels à $\sqrt{\Sigma pq}$ deviennent donc infiniment petits relativement à Σp. C'est une généralisation du théorème de Bernoulli (n° 268).

Si $2\Sigma pq$ tend vers une limite fixe a, la loi de la distribution des probabilités s'approche indéfiniment de la loi asymptote

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{a}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{a}}\,dx.$$

286. L'analyse précédente et ses conclusions s'appliquent également au cas où les probabilités p_i ne sont pas données exactement et où leurs valeurs dépendent du hasard.

Supposons par exemple que, à la $i^{\text{ième}}$ épreuve, il y ait probabilité

$\zeta_i(v)\,dv$ pour que la probabilité de l'événement soit v; on doit nécessairement avoir

$$\int_0^1 \zeta_i(v)\,dv = 1.$$

Quelle est la probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves?

Supposons qu'un joueur II perde 1 fr chaque fois que l'événement se produit et qu'il ne perde rien quand l'événement ne se produit pas; la probabilité cherchée est la probabilité pour que ce joueur perde z francs en μ parties.

Cette probabilité est donnée par la formule n° 231; il suffit de calculer l'espérance $\mathcal{E}_i$ du joueur II et la fonction d'instabilité $2(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2)$ de son jeu à la $i^{\text{ième}}$ partie.

Il y a probabilité $\zeta_i(v)\,dv$ pour que la probabilité de l'événement soit v et par suite pour que l'espérance du joueur II soit $-v$ et la fonction d'instabilité de son jeu, $2v(1-v)$; l'espérance du joueur II est donc

$$\mathcal{E}_i = -\int_0^1 v\,\zeta_i(v)\,dv.$$

La fonction d'instabilité est de même

$$2(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2) = 2\int_0^1 v(1-v)\,\zeta_i(v)\,dv.$$

La probabilité pour que le joueur II perde z francs en μ parties, c'est-à-dire la probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves est donc

$$\frac{e^{-\frac{\left[z-\sum\int_0^1 v\,\zeta_i(v)\,dv\right]^2}{2\sum\int_0^1 v(1-v)\,\zeta_i(v)\,dv}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\sum\int_0^1 v(1-v)\,\zeta_i(v)\,dv}}\,dz.$$

On pourrait imaginer des cas plus compliqués où les fonctions ζ seraient soumises à l'effet du hasard; ces problèmes se traiteraient

comme le précédent en ramenant la question proposée à une question équivalente relative à un jeu.

Pour donner une application de la formule précédente, supposons que les épreuves soient semblables et que pour chaque épreuve toutes les valeurs de la probabilité de l'événement soient également vraisemblables.

Dans ces conditions, $\zeta = 1$ et la probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves est

$$\frac{e^{-\frac{\left(z-\frac{\mu}{2}\right)^2}{\frac{2\mu}{6}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2\mu}{6}}}\,dz.$$

La valeur la plus probable de z est $\frac{\mu}{2}$ comme si à chaque épreuve l'événement avait pour probabilité $\frac{1}{2}$, mais les écarts sont différents : ils sont réduits dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

287. **Applications diverses.** — La formule qui exprime la probabilité élémentaire du premier genre ou probabilité pour qu'un joueur perde la somme x en μ parties (n° 231)

$$\frac{e^{-\frac{[\Sigma \mathcal{E}_i + x]^2}{2[\Sigma(\mathrm{E}_i^2 - \mathcal{E}_i^2)]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2[\Sigma(\mathrm{E}_i^2 - \mathcal{E}_i^2)]}}\,dx = \frac{e^{-\frac{[\Sigma \psi_i + x]^2}{\Sigma \varphi_i}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\Sigma \varphi_i}}\,dx,$$

et qui nous a permis de résoudre d'une façon très simple le problème des épreuves répétées non uniformes est susceptible d'un grand nombre d'applications ; elle exprime en effet la *probabilité pour qu'une somme ait une valeur donnée quand on connaît les probabilités relatives à chacune des quantités qui composent cette somme*.

Nous allons étudier quelques applications en supposant toujours que le nombre des épreuves est très grand ; la méthode que nous allons employer est absolument générale, elle consiste à assimiler chaque question à un problème analogue relatif à un jeu.

288. Lorsqu'on mesure plusieurs fois une grandeur qui dépend d'une seule variable, pour fixer les idées, une longueur, on obtient des chiffres plus ou moins différents. La différence entre la longueur exacte (qui est généralement inconnue) et la longueur mesurée à la $i^{\text{ième}}$ observation est dite l'*erreur* de l'observation.

Supposons que, à la $i^{\text{ième}}$ observation, il y ait probabilité $\zeta_i(u)\,du$ pour que l'erreur soit u, la quantité u pouvant varier, par exemple, entre $-\varepsilon_i$ et $+\varepsilon'_i$ de sorte que

$$\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon'_i} \zeta_i(u)\,du = 1.$$

Quelle est la probabilité pour que, en μ observations, la somme des erreurs ait une valeur donnée x?

La méthode que nous emploierons pour ce problème et pour les suivants est uniforme : nous imaginons un joueur H, nous faisons correspondre chacune des parties de son jeu à chacune des observations et nous supposons que ce joueur H perd, à chaque partie, une somme égale à la valeur de l'erreur commise à l'observation correspondante. La somme des erreurs pour μ observations est la somme totale perdue par le joueur H en μ parties.

La probabilité pour que la somme des erreurs des μ observations soit x est la probabilité pour que le joueur H perde la somme x en jouant μ parties.

A la $i^{\text{ième}}$ partie, le joueur H a la probabilité $\zeta_i(u)du$ pour perdre la somme u, son espérance pour cette partie est donc

$$\psi_i = \mathcal{E}_i = -\int_{-\varepsilon_i}^{+\varepsilon'_i} u\,\zeta_i(u)\,du.$$

La fonction d'instabilité est de même

$$\varphi_i = 2(\mathrm{E}_i^2 - \mathcal{E}_i^2) = 2\left[\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon'_i} u^2\,\zeta_i(u)\,du - \left(\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon'_i} u\,\zeta_i(u)\,du\right)^2\right].$$

La formule du n° 287 fait alors connaître la probabilité pour que le joueur H perde la somme x en μ parties ou pour que la somme des erreurs soit x en μ observations.

289. La quantité $-\psi_i$ est dite l'*erreur systématique* de la $i^{\text{ème}}$ observation, c'est la valeur moyenne des erreurs pour cette observation.

On dit que les observations sont d'égale précision quand le jeu correspondant est uniforme.

On dit que les erreurs sont uniquement *fortuites* ou *accidentelles* quand les quantités ψ sont nulles, c'est-à-dire quand le jeu correspondant est équitable. La probabilité pour que la somme des erreurs soit x dans le cas où les erreurs sont seulement accidentelles est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\sum_{i=1}^{i=\mu} 2\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon'_i} u^2\zeta_i(u)\,du}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{i=\mu} 2\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon'_i} u^2\zeta_i(u)\,du}}\,dx.$$

290. Si les observations (c'est-à-dire les mesures) sont d'égale précision et les erreurs uniquement fortuites, la probabilité pour que la somme des erreurs soit x est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu\int u^2\zeta(u)\,du}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu\int u^2\zeta(u)\,du}}\,dx.$$

291. Si les observations sont d'égale précision, les erreurs uniquement accidentelles et si la loi d'erreur est exprimée par la formule

$$\zeta(u) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2u^2},$$

la quantité k est dite le coefficient de précision ou simplement la précision de l'observation. La probabilité pour que la somme des erreurs soit x en μ observations est

$$\frac{k\,e^{-\frac{k^2x^2}{\mu}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}}\,dx.$$

Cette dernière formule est une conséquence rigoureuse de la précédente, même si le nombre μ des observations est petit (n° 234).

292. *Quelle est la probabilité pour que la moyenne arithmétique des erreurs ait une valeur donnée y?*

Si la moyenne arithmétique des erreurs est y, la somme des erreurs est μy; si l'on se place dans les mêmes conditions qu'au n° 289, la probabilité demandée est

$$\frac{\mu\, e^{-\frac{\mu^2 y^2}{\sum_{i=1}^{i=\mu} 2\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon'_i} u^2 \zeta_i(u)\,du}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{i=\mu} 2\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon'_i} u^2 \zeta_i(u)\,du}}\,dy.$$

293. Si les observations sont d'égale précision et si les erreurs sont uniquement fortuites (n° 290), la probabilité pour que la moyenne arithmétique des erreurs ait pour valeur y est

$$\frac{\sqrt{\mu}\, e^{-\frac{\mu y^2}{2\int u^2 \zeta(u)\,du}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\int u^2 \zeta(u)\,du}}\,dy.$$

L'amplitude des écarts est mesurée par la quantité

$$\frac{\sqrt{2\int u^2 \zeta(u)\,du}}{\sqrt{\mu}},$$

elle varie en raison inverse de la racine carrée du nombre des observations.

Quand les observations sont d'égale précision, l'erreur commise en prenant pour valeur de la quantité mesurée la moyenne arithmétique des mesures varie en raison inverse de la racine carrée du nombre des observations.

294. Ce résultat suppose que le nombre μ des observations est très grand, sauf dans le cas où la fonction $\zeta(u)$ est de la forme (291).

$$\zeta(u) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 u^2}.$$

Cette forme paraît particulière, elle exprime cependant la loi des erreurs dans la plupart des cas.

Pour le démontrer on se base sur une hypothèse : on suppose que l'erreur de l'observation est la résultante d'une grande quantité d'erreurs infinitésimales indépendantes; alors l'erreur observée u est la somme des erreurs infinitésimales comme la perte totale d'un joueur est la somme de ses pertes pour chaque partie. La probabilité de la perte d'un joueur affecte la forme exponentielle quand le nombre des parties jouées est très grand, donc la probabilité de l'erreur affectera la forme exponentielle.

L'hypothèse de la décomposition des erreurs paraît très plausible mais elle n'est pas nécessairement toujours vraie.

La formule précédente suppose que les erreurs infinitésimales se compensent en moyenne; s'il n'en était pas ainsi, il résulterait de leur superposition une erreur systématique c et la probabilité de l'erreur u serait

$$\varphi(u) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(u+c)^2}.$$

295. *Quelle est la probabilité pour que la somme des valeurs absolues des erreurs ait une valeur donnée x?*

Suivant notre méthode générale, supposons qu'un joueur H perde à chaque partie une somme égale à la valeur absolue de l'erreur commise à l'observation correspondante, la probabilité cherchée est la probabilité pour que, en μ parties, le joueur perde la somme x.

Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans l'hypothèse du n° 291; la probabilité pour que le joueur perde la somme u en jouant une seule partie est

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2u^2}.$$

L'espérance du joueur H pour une partie est

$$\psi_1 = -\int_0^\infty \frac{2k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2u^2} u\, du = -\frac{1}{k\sqrt{\pi}}.$$

La fonction d'instabilité est

$$\varphi_1 = 2\left[\int_0^\infty \frac{2k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2u^2} u^2\, du - \left\{\int_0^\infty \frac{2k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2u^2} u\, du\right\}^2\right] = \frac{1}{k^2}\,\frac{\pi-2}{\pi}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{k\, e^{-\frac{k^2\left(x-\frac{\mu}{k\sqrt{\pi}}\right)^2}{\mu\frac{\pi-2}{\pi}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\frac{\pi-2}{\pi}}}\,dx.$$

La valeur la plus probable de la somme des valeurs absolues des erreurs est $\frac{\mu}{k\sqrt{\pi}}$, l'amplitude des écarts en plus ou en moins est mesurée par la quantité

$$\frac{\sqrt{\mu}}{k}\sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}}.$$

296. *Quelle est la probabilité pour que la somme des carrés des erreurs ait une valeur donnée x?*

Suivant notre méthode générale, supposons qu'un joueur B perde à chaque partie une somme égale au carré de l'erreur commise à l'observation correspondante, la probabilité cherchée est la probabilité pour que le joueur B perde la somme x en μ parties.

Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans l'hypothèse du n° 291, le joueur ayant probabilité

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2u^2},$$

pour perdre la somme u^2 en jouant une seule partie, son espérance mathématique est

$$\psi_1 = -\int_0^\infty \frac{2k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2u^2}u^2\,du = -\frac{1}{2k^2},$$

la fonction d'instabilité est

$$\varphi_1 = 2\left[\int_0^\infty \frac{2k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2u^2}u^4\,du - \left\{\int_0^\infty \frac{2k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2u^2}u^2\,du\right\}^2\right] = \frac{1}{k^4}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{k^2\, e^{-\frac{k^4\left(x-\frac{\mu}{2k^2}\right)^2}{\mu}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}}\,dx.$$

La valeur la plus probable de la somme des carrés des erreurs est $\frac{\mu}{2k^2}$.

297. Dans la théorie du tir à la cible (ou du moins dans le cas le plus simple qu'étudie cette théorie), on suppose que la probabilité pour que le projectile atteigne la cible à une distance r du centre de celle-ci est donnée par la formule

$$2k^2 e^{-k^2r^2} r\,dr,$$

k^2 étant un coefficient de précision.

S'il est tiré un très grand nombre μ de projectiles, quelle est la probabilité pour que la somme des distances r ait une valeur donnée x?

Il suffit d'imaginer qu'un joueur B perde à chaque partie une somme égale à l'écart r du tir correspondant, la probabilité demandée est la probabilité pour que le joueur B perde la somme x en μ parties.

L'espérance mathématique du joueur B est, pour une partie

$$\psi_1 = -\int_0^\infty 2k^2 e^{-k^2r^2} r^2\,dr = -\frac{\sqrt{\pi}}{2k}.$$

La fonction d'instabilité est, pour une partie

$$\varphi_1 = 2\left[\int_0^\infty 2k^2 e^{-k^2r^2} r^3\,dr - \left\{\int_0^\infty 2k^2 e^{-k^2r^2} r^2\,dr\right\}^2\right] = \frac{4-\pi}{2k^2}.$$

La probabilité pour que la somme des distances soit x est donc

$$\frac{e^{-\frac{\left(x-\frac{\mu\sqrt{\pi}}{2k}\right)^2}{\mu\frac{4-\pi}{2k^2}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\frac{4-\pi}{2k^2}}}\,dx.$$

298. Quelle est la probabilité pour que la somme des carrés des distances r ait une valeur donnée x?

Il suffit d'imaginer qu'un joueur B perde à chaque partie, une somme égale au carré de l'écart r du tir correspondant; la probabilité cherchée est la probabilité pour que le joueur B perde la somme x en μ parties.

L'espérance mathématique du joueur H est, pour une partie,

$$\psi_1 = -\int_0^\infty 2k^2 e^{-k^2r^2} r^3\, dr = -\frac{1}{k^2}.$$

La fonction d'instabilité est, pour une partie,

$$\varphi_1 = 2\left[\int_0^\infty 2k^2 e^{-k^2r^2} r^5\, dr - \left\{\int_0^\infty 2k^2 e^{-k^2r^2} r^3\, dr\right\}^2\right] = \frac{2}{k^4}.$$

La probabilité pour que la somme des carrés des distances soit x est donc

$$\frac{e^{-\frac{\left(x-\frac{\mu}{k^2}\right)^2}{\frac{2\mu}{k^4}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2\mu}{k^4}}}\, dx.$$

CHAPITRE IX.

PROBABILITÉS CONNEXES.

299. Jusqu'à présent nous avons supposé l'indépendance, nous avons admis que les conditions pour une partie étaient indépendantes des résultats antérieurs du jeu.

Lorsqu'on essaie de s'affranchir de cette hypothèse on rencontre des difficultés excessives, de sorte que certaines classes de probabilités connexes semblent seules pouvoir être l'objet d'une théorie.

Nous étudierons ici les probabilités connexes du premier genre. Nous dirons qu'il y a connexité du premier genre quand les conditions à une partie dépendent uniquement de la perte actuelle et du rang occupé par la partie.

Nous supposerons d'abord que les conditions à une partie dépendent uniquement de la perte réalisée quand on commence cette partie.

300. Supposons que, jusqu'à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le jeu soit uniforme, qu'il soit équitable et caractérisé par la fonction φ_1.

La probabilité de la perte x à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est

$$(1) \qquad \frac{e^{-\frac{x^2}{\mu_1 \varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1 \varphi_1}}\,dx.$$

Supposons maintenant que, pour les μ_2 parties suivantes, le jeu soit uniforme, qu'il admette l'indépendance et qu'il soit caractérisé par les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ qui dépendent de la perte x à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie.

La probabilité pour que la perte soit z à la $(\mu_1 + \mu_2)^{\text{ième}}$ partie, cette perte ayant été x à la $\mu_1^{\text{ième}}$ est, en vertu du principe des probabilités

composées,

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\mu_1 \varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1 \varphi_1}} \frac{e^{-\frac{[\mu_2 \psi(x) + z - x]^2}{\mu_2 \varphi(x)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_2 \varphi(x)}} dx.$$

La perte x pouvant être quelconque entre $-\infty$ et $+\infty$ à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, la probabilité pour que la perte soit z à la $(\mu_1 + \mu_2)^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{\mu_1 \varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1 \varphi_1}} \frac{e^{-\frac{[\mu_2 \psi(x) + z - x]^2}{\mu_2 \varphi(x)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_2 \varphi(x)}} dx.$$

L'intégration est facile lorsque $\varphi(x)$ est constant et égal à φ_1 et lorsque, de plus, $\psi(x)$ a pour valeur ax, a étant une constante.

301. Le cas dont il s'agit pour être particulier n'en est pas moins très curieux, parce qu'il correspond à la question la plus simple que l'on puisse se poser, celle où l'on imagine qu'il existe une cause accélératrice ou retardatrice des écarts proportionnelle à la valeur même de ces écarts.

Si a est nul, le jeu admet l'indépendance, et les écarts sont proportionnels à la racine carrée du nombre des parties.

Si a est positif, à une perte x correspondra une espérance ax positive qui tendra à diminuer cette perte; par suite, les écarts croîtront moins vite que dans le cas où il y a indépendance. Les conditions du jeu ont donc une influence régulatrice.

Si, au contraire, a est négatif, une perte x rendra plus probable une perte plus grande. Les conditions du jeu rendront plus rapide la production des écarts, elles sont accélératrices.

Il est évident que le jeu considéré est équitable dans son ensemble pour cette raison qu'il est symétrique dans son ensemble.

302. La question dont nous allons nous occuper, dans le cas où les conditions sont retardatrices, présente un grand intérêt parce qu'elle fait connaître la loi de variation des écarts quand on suppose que ceux-ci étant infiniment petits sont soumis à une cause régulatrice.

En effet, l'espérance mathématique pour un intervalle élémen-

taire $d\mu$ est une fonction de la perte x et peut se représenter par le développement

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Si aucune cause n'agit constamment dans le même sens, a_0 est nul et si x est infiniment petit, la formule se réduit à $\psi(x) = a_1 x$.

Dans les mêmes conditions, la fonction d'instabilité relative à un intervalle élémentaire $d\mu$ doit être une constante φ_1 car elle ne peut être qu'une fonction paire de x.

La théorie qui suit présente donc un grand intérêt, parce qu'elle régit tous les cas où les écarts sont très petits.

303. Dans l'hypothèse où $\psi(x) = ax$ et $\varphi(x) = \varphi_1$, l'intégrale devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{\mu_1 \varphi_1}} e^{-\frac{[\mu_2 a x + z - x]^2}{\mu_2 \varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1 \varphi_1}\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_2 \varphi_1}} dx.$$

C'est une intégrale de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{2a}}.$$

La probabilité de la perte z à la $(\mu_1 + \mu_2)^{\text{ième}}$ partie est donc

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{\varphi_1[\mu_1(\mu_2 a - 1)^2 + \mu_2]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}\sqrt{\mu_1(\mu_2 a - 1)^2 + \mu_2}} dz.$$

elle est de la même forme que (1).

304. Supposons maintenant que μ_3 parties soient encore jouées, le jeu étant défini pour ces μ_3 parties comme pour les μ_2 précédentes par les fonctions $\varphi(z) = \varphi_1$ et $\psi(z) = az$.

La probabilité pour que la perte soit y à la $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^{\text{ième}}$ partie, la perte ayant été z à la $(\mu_1 + \mu_2)^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{\varphi_1[\mu_1(\mu_2 a - 1) + \mu_2]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}\sqrt{\mu_1(\mu_2 a - 1) + \mu_2}} \frac{e^{-\frac{[\mu_3 a z + y - z]^2}{\mu_3 \varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_3 \varphi_1}} dz\, dy.$$

La probabilité pour que la perte soit y à la $(\mu_1+\mu_2+\mu_3)^{\text{ième}}$ partie s'obtiendra en intégrant cette expression entre $-\infty$ et $+\infty$; cette probabilité est

$$\frac{e^{-\frac{y^2}{\varphi_1\{[\mu_1(\mu_2 a-1)^2+\mu_2](\mu_3 a-1)^2+\mu_3\}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}\sqrt{[\mu_1(\mu_2 a-1)^2+\mu_2](\mu_3 a-1)^2+\mu_3}}\,dy.$$

305. Quel que soit le nombre des quantités $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots$ que nous supposerons toutes égales à $\Delta\mu$ et dont nous désignerons la somme par μ, la probabilité de la perte m a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{m^2}{\varphi_1 f(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}\sqrt{f(\mu)}}\,dm.$$

La fonction f satisfait à l'équation de récurrence

$$f(\mu)=f(\mu-(\Delta\mu))[a(\Delta\mu)-1]^2+(\Delta\mu),$$

de sorte que, $\Delta\mu$ décroissant indéfiniment jusqu'à zéro, on a

$$f(\mu)=\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}.$$

La probabilité de la perte m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est donc

$$\frac{e^{-\frac{m^2}{\varphi_1\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}}\,dm,$$

et cette expression suppose que, d'une façon continuelle, l'espérance pour une partie est proportionnelle à la perte subie avant cette partie.

306. La probabilité pour que la perte soit supérieure à x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'obtient en intégrant l'expression précédente entre x et l'infini; on a donc

$$\psi_{\mu,x}=\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi_1\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}\sqrt{\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}}\,dx.$$

En posant

$$\frac{x}{\sqrt{\varphi_1 \frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}} = \lambda,$$

on obtient

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x\sqrt{2a}}{\sqrt{\varphi_1(1-e^{-2a\mu})}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Cette probabilité se calcule par les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y} e^{-y^2}\,dy.$$

307. La probabilité pour que la perte soit comprise entre $\pm x$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x\sqrt{2a}}{\sqrt{\varphi_1(1-e^{-2a\mu})}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Si nous supposons cette probabilité constante, x varie en raison directe de

$$\sqrt{\frac{\varphi_1(1-e^{-2\alpha\mu})}{2a}};$$

cette quantité mesure donc l'amplitude des écarts ou l'instabilité.

Son carré est la *fonction d'instabilité*

$$\varphi_1\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a};$$

cette fonction ne jouit pas de la propriété d'addition comme dans le cas où il y a indépendance.

Deux cas sont à distinguer suivant que les conditions du jeu sont retardatrices ($a > 0$) ou accélératrices ($a < 0$).

Dans le premier cas, la probabilité de la perte x quand μ augmente indéfiniment ne tend pas vers zéro, mais vers la valeur asymptote.

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{\varphi_1}{2a}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}}}\,dx,$$

l'écart correspondant à une probabilité donnée croit donc avec μ, mais il reste inférieur à une quantité fixe.

Au contraire, quand les conditions sont accélératrices, les écarts croissent avec une excessive rapidité.

308. Les conditions d'un jeu sont comme précédemment telles que, à chaque partie, l'espérance du joueur soit proportionnelle à sa perte actuelle x et que la fonction d'instabilité demeure constante. Si l'on suppose que la perte actuelle du joueur soit z, quelle est la probabilité pour qu'elle prenne la valeur x après μ_2 parties?

Le jeu est défini à chaque partie par la fonction d'instabilité φ_1 et par l'espérance ax proportionnelle à x.

Si la perte initiale est nulle, la probabilité de la perte x en $\mu_1+\mu_2$ parties est (nº 305)

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{\varphi_1}{2a}\left[1-e^{-2a(\mu_1+\mu_2)}\right]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}\left[1-e^{-2a(\mu_1+\mu_2)}\right]}}\,dx.$$

On peut écrire autrement l'expression de cette probabilité : soit $F(\mu_2, z, x)$ la probabilité pour que la perte ayant la valeur z, prenne la valeur x en μ_2 parties.

La probabilité pour que la perte soit z en μ_1 parties et pour qu'elle soit x en $\mu_1+\mu_2$ parties est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{\frac{\varphi_1}{2a}\left[1-e^{-2a\mu_1}\right]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}\left[1-e^{-2a\mu_1}\right]}}\times F(\mu_2, z, x).$$

Si l'on intègre cette expression entre $-\infty$ et $+\infty$, on obtient, d'après le principe de la probabilité totale, la probabilité de la perte x en $\mu_1+\mu_2$ parties ; on a donc

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{\varphi_1}{2a}\left[1-e^{-2a(\mu_1+\mu_2)}\right]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}\left[1-e^{-2a(\mu_1+\mu_2)}\right]}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{z^2}{\frac{\varphi_1}{2a}\left[1-e^{-2a\mu_1}\right]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}\left[1-e^{-2a\mu_1}\right]}}F(\mu_2, z, x)\,dz.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction F.

309. L'équation est vérifiée identiquement si l'on pose

$$F = \frac{e^{-\frac{(x - z e^{-a\mu_2})^2}{\frac{\varphi_1}{2a}(1 - e^{-2a\mu_2})}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}(1 - e^{-2a\mu_2})}}\, dx.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que la perte dont la valeur initiale est z prenne la valeur x après μ_2 parties.

La valeur moyenne de x est $ze^{-a\mu_2}$. La valeur la plus probable de x est $ze^{-a\mu_2}$. Les probabilités sont symétriques de part et d'autre de la valeur moyenne.

Si μ_2 augmente indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers une loi asymptote représentée par la formule

$$\frac{\sqrt{2a}\, e^{-\frac{2a x^2}{\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}}\, dx.$$

Les formules qui précèdent sont rigoureuses; celles qui vont suivre et qui seront relatives à des probabilités discontinues ne pourront être qu'approchées.

310. Une urne A contient n boules blanches et n boules noires; une seconde urne B contient également n boules blanches et n boules noires. On tire au hasard une boule de A et on la place dans B, en même temps qu'on tire au hasard une boule de B pour la placer dans A. On recommence μ fois la même opération; quelle est la probabilité pour obtenir un écart x, c'est-à-dire pour que le nombre des boules blanches contenues dans l'urne A soit $n - x$?

Imaginons un joueur H; faisons correspondre chacune des parties de son jeu à chacun des doubles tirages et supposons qu'il perde à chaque partie une somme égale à l'accroissement de l'écart au double tirage correspondant; c'est ce que l'on peut exprimer plus simplement en disant que l'on imagine un joueur H perdant constamment une somme égale à l'écart. La probabilité d'un écart x après μ tirages est la probabilité pour que le joueur H perde la somme x en μ parties.

Supposons que l'écart soit x.

Au prochain tirage, il y a probabilité

$$\frac{n+x}{2n}\frac{n-x}{2n},$$

pour qu'on tire une boule blanche de A et une boule blanche de B; alors l'écart conserve sa valeur x.

Il y a probabilité

$$\frac{n+x}{2n}\frac{n+x}{2n},$$

pour qu'on tire une blanche de A et une noire de B. Alors l'écart devient $x-1$; il diminue de 1.

Il y a de même probabilité

$$\frac{n-x}{2n}\frac{n-x}{2n},$$

pour qu'on extraie une noire de A et une blanche de B. Dans ces conditions l'écart devient $x+1$.

Enfin la quantité

$$\frac{n-x}{2n}\frac{n+x}{2n}$$

exprime la probabilité pour qu'une noire sorte de l'urne A et une noire de l'urne B. Dans ce dernier cas l'écart conserve sa valeur x.

L'espérance mathématique du joueur H relative au prochain tirage quand l'écart est x est donc

$$-\frac{(n-x)^2}{4n^2}+\frac{(n+x)^2}{4n^2}=\frac{x}{n};$$

elle est égale au produit de l'écart par une constante.

La fonction d'instabilité relative au prochain tirage est

$$\frac{n^2+x^2}{n^2}.$$

Nous supposerons que n et μ sont de grands nombres du même ordre; s'il n'existait aucune cause retardatrice des écarts, c'est-à-dire si les épreuves étaient indépendantes, x^2 serait de l'ordre μ (n° 262)

et par conséquent négligeable comparativement à μ^2. Puisque dans le cas actuel il existe une cause tendant à diminuer les écarts, x^2 est à plus forte raison négligeable comparativement à μ^2 ou à n^2, et la fonction d'instabilité a pour valeur 1.

L'espérance mathématique du joueur H étant constamment proportionnelle à son gain ou à sa perte et la fonction d'instabilité étant constante, on peut appliquer au problème actuel la formule du n° 305. La probabilité pour que le joueur H perde la somme x, c'est-à-dire la probabilité pour que l'écart soit x en μ tirages, est

$$\frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{2x^2}{n\left[1-e^{-\frac{2\mu}{n}}\right]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n\left[1-e^{-\frac{2\mu}{n}}\right]}}\,dx.$$

311. Nous avons supposé qu'initialement les deux urnes contenaient le même nombre de boules blanches et de boules noires : on peut traiter la même question en supposant une composition initiale quelconque, chacune des urnes contenant toujours $2n$ boules.

Soit z l'écart initial : la probabilité pour que l'écart prenne la valeur x en μ épreuves est exprimée par la formule du n° 309, où l'on doit remplacer a par $\frac{1}{n}$ et φ_1 par 1. Cette probabilité est donc

$$\frac{e^{-\frac{\left(x-z e^{-\frac{\mu}{n}}\right)^2}{\frac{n}{2}\left(1-e^{-\frac{2\mu}{n}}\right)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{n}{2}\left(1-e^{-\frac{2\mu}{n}}\right)}}\,dx.$$

Cette formule suppose que l'écart initial z est assez petit pour que z^2 soit négligeable comparativement à n^2. S'il en était autrement, la fonction d'instabilité dépendrait de l'écart et notre analyse ne serait plus applicable.

312. *L'urne A contient m boules blanches et n boules noires ; l'urne B m' boules blanches et n' boules noires ; à chaque épreuve, on tire une boule*

de A et on la place dans B, en même temps qu'on tire une boule de B pour la placer dans A. Quelle est la probabilité pour que, après μ épreuves, les urnes A et B aient une composition donnée?

Ce problème est analogue à celui qu'on vient de résoudre, mais on ne suppose plus que les urnes soient égales ni qu'il y ait dans la totalité autant de boules blanches que de boules noires.

S'il y a dans l'urne A

$$\frac{(m+m')(m+n)}{m+n+m'+n'}+x$$

boules blanches, nous disons que l'écart est x.

Si l'écart est x, il y a dans l'urne A

$$\frac{(n+n')(m+n)}{s}-x$$

boules noires, en désignant par s la somme $m+n+m'+n'$, c'est-à-dire le nombre total des boules. Dans l'urne B il y a

$$\frac{(m+m')(m'+n')}{s}-x$$

boules blanches et

$$\frac{(n+n')(m'+n')}{s}+x$$

boules noires.

Si l'écart est x, il y a au prochain tirage probabilité

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}(m+m')(m+n)(n+n')(m'+n') \\ \quad +sx[(m+m')(m+n)+(n+n')(m'+n')]+s^2x^2\end{array}\right\}}{(m+n)(m'+n')s^2},$$

pour qu'il sorte une blanche de l'urne A et une noire de l'urne B et par suite pour que l'écart diminue d'une unité.

Il y a de même probabilité

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}(n+n')(m+n)(m+m')(m'+n') \\ \quad -sx[(n+n')(m+n)+(m+m')(m'+n')]+s^2x^2\end{array}\right\}}{(m+n)(m'+n')s^2},$$

pour qu'il sorte une noire de l'urne A et une blanche de l'urne B et par suite pour que l'écart augmente d'une unité.

Supposons qu'un joueur H perde, à chaque partie, une somme égale à l'accroissement de l'écart au double tirage correspondant, ou que, en d'autres termes, il perde constamment une somme égale à l'écart.

Pour le tirage considéré, son espérance mathématique est égale à la différence des probabilités précédentes; elle a donc pour valeur

$$\frac{sx}{(m+n)(m'+n')},$$

elle est proportionnelle à x.

La fonction d'instabilité a pour expression

$$\frac{4(m+m')(n+n')}{s^2},$$

si l'on suppose que x est négligeable comparativement aux quantités m, n, m', n'. Puisque, au début, l'urne A contient m boules blanches, l'écart initial est

$$z = \frac{mn'-m'n}{s},$$

notre analyse le suppose négligeable comparativement à m, m', n, n'.

L'espérance étant proportionnelle à x et la fonction d'instabilité étant constante, la probabilité pour que, en μ épreuves, l'écart ait une valeur donnée x, s'obtient en remplaçant dans la formule du n° 309 les quantités a, φ_1 et z par leur valeur; la probabilité de l'écart x est donc

$$\frac{s\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{s\left[sx-(mn'-m'n)e^{-\frac{s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\right]^2}{2(m+m')(n+n')(m+n)(m'+n')\left[1-e^{-\frac{2s\mu}{(m+n)(m'+n)}}\right]}}}{\sqrt{2(m+m')(n+n')(m+n)(m'+n')\left[1-e^{-\frac{2s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\right]}}\,dx.$$

313. **Probabilités non uniformes.** — D'après nos définitions, un jeu est uniforme quand il est constamment identique à lui-même.

Dans la théorie des probabilités connexes on considère une uniformité en quelque sorte relative : Nous disons, dans cette théorie, que les probabilités sont uniformes quand les conditions du jeu pour une partie ne dépendent pas explicitement de la variable μ, c'est-à-dire du rang occupé par la partie considérée.

D'après cette définition, les problèmes que nous avons traités sont relatifs à des probabilités connexes uniformes. Nous allons maintenant nous occuper des mêmes probabilités dans le cas de la non-uniformité.

314. Il est possible d'obtenir l'expression des probabilités quand, à chaque partie, la fonction d'instabilité dépend uniquement de μ, quand elle est par conséquent de la forme $\lambda(\mu)$ et quand, d'autre part, l'espérance mathématique pour une partie est égale au produit de la perte totale x réalisée avant cette partie par une fonction de μ, $f(\mu)$.

Le cas dont il s'agit est beaucoup plus général que celui que nous avons traité (n° 301); on obtiendrait ce dernier cas en supposant constants $\lambda(\mu)$ et $f(\mu)$.

En employant les mêmes raisonnements que précédemment (n°s 300-305) on est conduit au résultat suivant :

La probabilité de la perte x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{F(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{F(\mu)}}\,dx,$$

$F(\mu)$ étant l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + 2f(\mu)F = \lambda(\mu).$$

On en déduit

$$F(\mu) = e^{-2\int f(\mu)\,d\mu}\int \lambda(\mu)\,e^{2\int f(\mu)\,d\mu}\,d\mu.$$

315. Les fonctions $f(\mu)$ et $\lambda(\mu)$ étant arbitraires (la seconde positive), $F(\mu)$ est arbitraire; mais il ne faudrait pas croire que, la probabilité s'exprimant comme dans le cas de l'indépendance, il y ait analogie entre les deux cas.

La fonction $F(\mu)$, en effet, ne possède jamais la propriété d'addition sauf lorsqu'il y a indépendance, c'est-à-dire lorsque $f(\mu)$ est nul.

Si la fonction $F(\mu)$ possédait la propriété d'addition, la fonction d'instabilité pour la dernière partie, c'est-à-dire pour l'intervalle $\mu - d\mu$, μ, serait $F'(\mu)\,d\mu$; or cette fonction d'instabilité a pour valeur $\lambda(\mu)\,d\mu$, on aurait donc $F'(\mu) = \lambda(\mu)$ et l'équation différentielle se

réduirait à $f(\mu)=0$; le jeu serait alors équitable et il admettrait l'indépendance.

Il faut donc bien se garder de croire que la forme

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi\mu}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}$$

de l'expression de la probabilité convient exclusivement pour les cas où il y a indépendance.

316. La probabilité peut se représenter par une courbe qui, géométriquement, a la forme connue mais dont la loi de déformation suffit pour montrer toute la différence qui existe entre le problème actuel et celui des probabilités indépendantes. Les écarts vont en croissant et, par suite, la courbe en se dilatant lorsque $\frac{\partial F}{\partial\mu}$ est positif; or on a

$$\frac{\partial F}{\partial\mu}=\lambda(\mu)-2f(\mu)\,e^{-2\int f(\mu)\,d\mu}\int\lambda(\mu)\,e^{2\int f(\mu)\,d\mu}\,d\mu;$$

$\lambda(\mu)$ est positif et quelconque, $f(\mu)$ est arbitraire. Si $f(\mu)$ est nul il y a indépendance, $\frac{\partial F}{\partial\mu}$ est positif ou nul, la courbe ne peut que se dilater. Si $f(\mu)$ est négatif, la courbe se dilate plus rapidement encore.

Mais si $f(\mu)$ est positif, il peut être suffisamment grand pour que $\frac{\partial F}{\partial\mu}$ soit négatif; alors les écarts vont en diminuant, la courbe se contracte et repasse par ses états antérieurs.

Si l'on ne particularise pas la forme de la fonction $f(\mu)$, celle-ci est arbitraire et la loi des alternatives des dilatations et des contractions des écarts est quelconque.

317. Une urne contient m boules blanches et n boules noires; on en extrait μ boules au hasard sans les remettre dans l'urne. On dit que l'écart est x si sur les μ tirages il est sorti $\frac{\mu m}{m+n}+x$ boules blanches. Quelle est la probabilité de l'écart x?

Supposons qu'un joueur A perde à chaque partie une somme égale

à l'accroissement de l'écart au tirage correspondant, supposons que μ tirages aient été effectués et que l'écart soit x.

Au tirage suivant, comme il n'y a plus dans l'urne que $m+n-\mu$ boules dont

$$m-\left(\frac{m\mu}{m+n}+x\right)$$

sont blanches, il y a probabilité

$$\frac{(m-x)(m+n)-m\mu}{(m+n)(m+n-\mu)}$$

pour qu'il sorte une blanche et par suite pour que l'écart soit augmenté de la quantité $\frac{n}{m+n}\cdot$

Il y a de même probabilité

$$\frac{(m+n)(n+x)-n\mu)}{(m+n)(m+n-\mu)}$$

pour qu'il sorte une noire et qu'alors l'écart diminue de la quantité $\frac{m}{m+n}\cdot$

L'espérance mathématique du joueur A pour le tirage considéré est donc

$$\frac{x}{m+n-\mu},$$

elle est proportionnelle à x et elle est de la forme $xf(\mu)$.

La fonction d'instabilité a pour valeur

$$\frac{2[(m+n)(m-x)-m\mu][(m+n)(n+x)-n\mu]}{(m+n)^2(m+n-\mu)^2}$$

Nous supposerons que m, n et μ sont de grands nombres du même ordre ; si aucune cause retardatrice n'existait, c'est-à-dire si à chaque épreuve la probabilité de sortie d'une boule blanche était constante, l'écart x serait de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ (n° 262) et par suite x serait négligeable par rapport à μ. Puisque, dans le cas actuel, les écarts tendent d'eux-mêmes à diminuer, x est à plus forte raison négligeable comparativement à μ, à m ou à n. L'expression de la fonction d'instabilité se

réduit donc à

$$\frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

L'espérance mathématique étant de la forme $xf(\mu)$ et la fonction d'instabilité de la forme $\lambda(\mu)$, on peut appliquer au problème qui nous occupe la formule du n° 314.

La probabilité pour que le joueur A perde la somme x, c'est-à-dire pour que l'écart soit x en μ épreuves, est donc

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{F(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{F(\mu)}}\,dx.$$

$F(\mu)$ étant l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}+\frac{2F}{m+n-\mu}=\frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

On déduit cette dernière égalité

$$F=\frac{2mn}{(m+n)^2}\,\frac{\mu(m+n-\mu)}{m+n}.$$

La probabilité de l'écart x est donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\sqrt{\frac{(m+n)^2}{mn}}\sqrt{\frac{m+n}{m+n-\mu}}\,e^{-\frac{x^2}{2\mu}\frac{(m+n)^2}{mn}\frac{m+n}{m+n-\mu}}\,dx.$$

Si après chaque tirage la boule extraite était replacée dans l'urne, la probabilité de sortie d'une boule blanche serait constamment $\frac{m}{m+n}$ et la probabilité de l'écart x aurait pour valeur

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\sqrt{\frac{(m+n)^2}{mn}}\,e^{-\frac{x^2(m+n)^2}{2\mu mn}}\,dx.$$

Lorsque les boules ne sont pas replacées dans l'urne, l'écart est donc diminué dans le rapport de $\sqrt{m+n-\mu}$ à $\sqrt{m+n}$.

CHAPITRE X.

PROBABILITÉS CONTINUES DU SECOND GENRE.

318. D'après notre classification des probabilités, celles-ci sont dites du *second genre* quand la variable qui exprime la somme gagnée ou perdue par un joueur est limitée dans un sens.

Nous supposerons que c'est la perte du joueur qui est limitée, c'est-à-dire que le joueur A possède seulement la somme m que nous appelons sa *fortune*. Il joue contre un adversaire de fortune infinie, chacun des joueurs devant régler les différences après chaque partie.

Dans ces conditions, le joueur dont la fortune est limitée pourra à un moment donné avoir perdu sans espoir de retour la somme totale qu'il voulait jouer, nous dirons alors qu'il est ruiné.

Si nous cherchons seulement les probabilités de ruine du joueur A, nous n'avons pas à supposer qu'il lutte contre un seul adversaire, son sort ne dépendant que des conditions du jeu qui lui sont relatives. On peut supposer que le joueur A ait plusieurs adversaires, chacun d'eux ayant une fortune infinie.

Lorsque le joueur A n'a qu'un adversaire B, le sort de B se déduit immédiatement de celui de A.

Dans le présent Chapitre, nous nous occuperons seulement du sort du joueur A qui a pour fortune m.

319. Nous aurons à resoudre les questions suivantes :

1° Quelle est la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ pour que le joueur soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, ou, en d'autres termes, quelle est la probabilité pour que la perte m soit atteinte pour la première fois à la $\mu^{\text{ième}}$ partie?

La probabilité $\Pi_{\mu,m}$ est la probabilité élémentaire du second genre.

2° Quelle est la probabilité $P_{\mu,m}$ pour que la ruine se produise en μ parties ? $P_{\mu,m}$ est la probabilité du second genre.

Il est évident que la connaissance d'une des probabilités P et Π entraîne la connaissance de l'autre, car on a

$$P_{\mu,m} = \int_0^\mu \Pi_{\mu,m}\, d\mu \qquad \text{et} \qquad \Pi_{\mu,m} = \frac{\partial P_{\mu,m}}{\partial \mu}.$$

3° En supposant qu'aucune limite ne soit assignée pour la durée du jeu, quelle est la durée moyenne de celui-ci et la probabilité totale $P_{\infty,m}$ de ruine du joueur ?

4° Quelle est la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde une somme donnée?

5° Quelle est l'espérance mathématique du joueur A?

Nous étudierons ces différents problèmes en supposant d'abord que le jeu est équitable et uniforme, puis qu'il est équitable et non uniforme. Ensuite, nous ferons l'étude des cas où le jeu n'est pas équitable et finalement des cas où il est connexe.

320. **Cas où il y a symétrie et uniformité.** — Nous avons vu (n° 239) que si l'on suppose la continuité, le fait, pour un jeu, d'être équitable a pour conséquence la symétrie des probabilités. Il en résulte que certains problèmes relatifs aux jeux équitables peuvent se résoudre par simple raison de symétrie.

En désignant comme précédemment par $\mathfrak{P}_{\mu,m}$ la probabilité pour que le joueur perde une somme supérieure à m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie et par $P_{\mu,m}$ la probabilité pour qu'il soit ruiné avant μ parties, on a, en supposant le jeu équitable,

$$P_{\mu,m} = 2\,\mathfrak{P}_{\mu,m}.$$

En effet, la perte m ne peut être dépassée au bout de μ parties sans l'avoir été antérieurement, la probabilité $\mathfrak{P}$ est donc égale à la probabilité P multipliée par la probabilité pour que, la perte m ayant été atteinte avant μ parties soit dépassée à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire multipliée par $\frac{1}{2}$; on a donc

$$\mathfrak{P}_{\mu,m} = \frac{1}{2} P_{\mu,m}.$$

La probabilité pour que la perte m soit atteinte en μ parties est le double de la probabilité pour que la perte soit supérieure à m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Si μ devient infini, $\mathfrak{P}_{\infty,m}$ a pour valeur $\frac{1}{2}$ et alors $P_{\infty,m} = 1$; la probabilité de ruine est une certitude.

321. De la formule (n° 242)

$$\mathfrak{P}_{\mu,m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right),$$

on déduit

$$P_{\mu,m} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = 1 - \Theta\left(\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right).$$

Rappelons que φ_1 est la fonction d'instabilité relative à une partie, c'est-à-dire pour le jeu équitable, le double de la valeur moyenne des carrés des pertes.

322. En différentiant l'égalité ci-dessus par rapport à μ, on obtient la *probabilité élémentaire du second genre*, c'est-à-dire la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ pour que le joueur soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie :

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{\partial P_{\mu,m}}{\partial\mu} = \frac{m e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}\,d\mu.$$

323. **Distribution des probabilités.** — La connaissance de la probabilité de ruine du joueur ne résout pas d'une façon complète le problème que nous nous sommes proposé, il nous reste à étudier le cas où le joueur n'est pas ruiné.

Nous allons chercher la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur ait perdu la somme $m - y$.

Si le joueur, lorsqu'il est ruiné, pouvait continuer à jouer, il y aurait, par suite de la symétrie de la probabilité, autant de chances pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie il ait perdu la somme y que de chances pour qu'il l'ait gagnée; dans le premier cas la perte serait $m + y$ et dans le second cas $m - y$.

La possibilité de la ruine du joueur supprime donc, en même temps que la probabilité de la perte $m+y$, une probabilité égale pour la perte $m-y$.

La probabilité pour que la perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est donc

$$\varpi_{\mu,m-y} - \varpi_{\mu,m+y}$$

ou

$$\frac{e^{-\frac{(m-y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dy - \frac{e^{-\frac{(m+y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dy.$$

Nous connaissons maintenant les probabilités relatives à tous les cas possibles, quand il y a ou non ruine; nous connaissons donc d'une façon complète la distribution des probabilités.

La valeur de y qui correspond à la probabilité maxima est supérieure à m; lorsque le joueur n'est pas ruiné l'hypothèse la plus probable correspond à un gain.

324. La probabilité pour que y soit compris entre y_1 et ∞ est

$$\int_{y_1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(m-y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dy - \int_{y_1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(m+y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dy.$$

En posant dans la première intégrale

$$\frac{m-y}{\sqrt{\mu\varphi_1}} = \lambda$$

et dans la seconde

$$\frac{m+y}{\sqrt{\mu\varphi_1}} = \lambda,$$

la probabilité a pour expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{m-y_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{m+y_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Ces intégrales se calculent aisément à l'aide des Tables de la fonction

$$\Theta(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}\,dz,$$

qui sont reproduites à la fin du Volume.

325. En supposant que $y_1 = 0$, on obtient pour la probabilité

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda;$$

c'est-à-dire $1 - P_{\mu,m}$, résultat évident.

326. En posant $y_1 = m$, on obtient la probabilité totale pour qu'il y ait gain : c'est la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{2m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{2m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right).$$

En retranchant cette dernière quantité de $1 - P_{\mu,m}$ on obtient la probabilité pour que le joueur perde une somme comprise entre zéro et m

$$\Theta\left(\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{2m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right).$$

327. **Étude de l'espérance mathématique.** — L'espérance négative est la somme de deux termes, l'un $-mP_{\mu,m}$ relatif au cas où le joueur est ruiné et l'autre

$$-\int_0^m \frac{(m-y)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\left(e^{-\frac{(m-y)^2}{\mu\varphi_1}} - e^{-\frac{(m+y)^2}{\mu\varphi_1}}\right)dy,$$

relatif au cas où le joueur a perdu une somme comprise entre zéro et m.

L'espérance positive a pour valeur

$$\int_m^{\infty} \frac{(y-m)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\left(e^{-\frac{(m-y)^2}{\mu\varphi_1}} - e^{-\frac{(m+y)^2}{\mu\varphi_1}}\right)dy.$$

elle est égale à l'espérance négative, résultat évident.

Les deux espérances ont pour valeur absolue

$$\frac{\sqrt{\mu\varphi_1}}{2\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{-\frac{4m^2}{\mu\varphi_1}}\right) + m\left[1 - \Theta\left(\frac{2m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right)\right],$$

elles croissent constamment de zéro à $\sqrt{\frac{\mu\varphi_1}{4\pi}}$ quand m croît de zéro à l'infini. Ce résultat était à prévoir (n° 254).

La quantité m ayant une valeur fixe déterminée, les espérances positive et négative tendent vers $+m$ et $-m$ lorsque μ tend vers l'infini.

328. La *valeur moyenne relative* du gain, quand gain il y a, est $\frac{\mathcal{E}'}{P'\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ étant l'espérance positive et P′ la probabilité pour qu'il y ait gain.

Si μ tend vers l'infini, $\mathcal{E}'$ tend vers m et P′ vers zéro, la valeur moyenne relative du gain tend donc vers l'infini.

329. **Durée moyenne du jeu.** — Cherchons d'abord quelle est la *durée la plus probable du jeu*, c'est-à-dire quel est le nombre μ de parties qui correspond à la plus grande probabilité pour que la ruine du joueur s'accomplisse à la $\mu^{\text{ième}}$ partie; en annulant la dérivée de l'expression

$$\frac{m e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}},$$

on obtient le nombre cherché

$$\mu = \frac{2m^2}{3\varphi_1}.$$

330. Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, sa *durée probable* est exprimée par le nombre μ de parties tel que $P_{\mu,m} = \frac{1}{2}$. Ce nombre est

$$\frac{4,4m^2}{\varphi_1},$$

il est environ six fois plus grand que celui qui correspond à la durée la plus probable.

Si le jeu doit durer au maximum μ parties, sa *durée probable absolue* est la quantité μ_1 telle que $P_{\mu_1,m} = \frac{1}{2}$, d'où $\mu_1 = \frac{4,4m^2}{\varphi_1}$.

Si μ est inférieur à μ_1, la durée probable absolue est μ.

La *durée probable relative* du jeu est la quantité μ_1 telle que

$$P_{\mu_1, m} = \frac{1}{2} P_{\mu, m}.$$

On résout cette équation avec les Tables de la fonction Θ.

331. Si aucune limite n'est assignée pour la durée du jeu, la *durée moyenne*, c'est-à-dire l'espérance mathématique d'un joueur H à qui on promettrait 1^{fr} par partie jouée, est exprimée par l'intégrale

$$\int_0^\infty \mu \frac{\partial P}{\partial \mu} d\mu = \int_0^\infty \frac{m e^{-\frac{m^2}{\mu \varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu \varphi_1}} d\mu.$$

En posant $\frac{m^2}{\mu \varphi_1} = \lambda^2$, elle devient

$$\frac{2m^2}{\varphi_1 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2} d\lambda.$$

Cette intégrale est infinie.

La durée moyenne du jeu est donc infinie.

332. Occupons-nous maintenant du cas où le joueur A doit jouer au maximum μ parties. La *durée moyenne absolue* du jeu est l'espérance mathématique d'un joueur H à qui on promettrait 1^{fr} par partie jouée.

Cette espérance se compose de deux termes : l'un est relatif au cas où le jeu ne s'est pas terminé avant μ parties, c'est évidemment la quantité

$$(1 - P_{\mu, m})\mu;$$

l'autre est relatif au cas où le jeu s'est terminé avant μ parties, c'est l'intégrale

$$\int_0^\mu \mu \frac{\partial P}{\partial \mu} d\mu = \int_0^\mu \frac{m e^{-\frac{m^2}{\mu \varphi_1}}}{\sqrt{\pi \mu \varphi_1}} d\mu.$$

En posant $\frac{m^2}{\mu \varphi_1} = \lambda^2$, cette intégrale devient

$$\frac{2m^2}{\varphi_1 \sqrt{\pi}} \int_{\frac{m}{\sqrt{\mu \varphi_1}}}^\infty \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2} d\lambda.$$

Transformons-la en remarquant que de l'égalité

$$\int_u^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \int_u^\infty \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda^2}\, 2\lambda\, d\lambda$$

on déduit, en intégrant par parties,

$$\int_u^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{e^{-u^2}}{2u} - \int_u^\infty e^{-\lambda^2}\frac{d\lambda}{2\lambda^2}.$$

L'intégrale proposée devient alors

$$\frac{2m\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}}e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}} - \frac{4m^2}{\varphi_1\sqrt{\pi}}\int_{\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

ou

$$\frac{2m\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}}e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}} - \frac{2m^2}{\varphi_1}\mathrm{P}_{\mu,m}.$$

La durée moyenne absolue a donc pour valeur

$$\frac{2m\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}}e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}} - \frac{2m^2}{\varphi_1}\mathrm{P}_{\mu,m} + (1-\mathrm{P}_{\mu,m})\mu.$$

Lorsque μ est très grand, elle se réduit sensiblement à

$$\frac{4m\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}};$$

elle est donc proportionnelle à la fortune du joueur et à la racine carrée du nombre maximum des parties.

Lorsque le nombre des parties peut être illimité, la durée moyenne est infinie.

333. La *durée moyenne relative* du jeu est le nombre moyen de parties qui amènent la ruine, quand ruine il y a; c'est, par définition, la quantité

$$\frac{1}{\mathrm{P}_{\mu,m}}\int_0^\mu \mu\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial\mu}\,d\mu$$

ou

$$\frac{2m\sqrt{\mu}}{P_{\mu,m}\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1}}e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}} - \frac{2m^2}{\varphi_1}.$$

334. **Quelques intégrales.** — La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m est plus grand que m_1. La probabilité pour que la perte m soit atteinte pour la première fois à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{\mu_1, m_1}\Pi_{\mu-\mu_1, m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être atteinte pour la première fois à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, on a, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\Pi_{\mu,m} = \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu} \Pi_{\mu_1,m_1}\Pi_{\mu-\mu_1,m-m_1}\,d\mu_1$$

ou, en remplaçant les quantités Π par leur valeur,

$$\frac{m\,e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}} = \int_0^\mu \frac{m_1\,e^{-\frac{m_1^2}{\mu_1\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu_1\sqrt{\mu_1\varphi_1}}\;\frac{(m-m_1)\,e^{-\frac{(m-m_1)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}(\mu-\mu_1)\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}\,d\mu_1.$$

Cette formule pourrait être obtenue quoique péniblement par les procédés ordinaires de l'Analyse.

Mais le calcul des probabilités permet sa généralisation immédiate : On peut supposer la perte m divisée en un nombre arbitraire d'intervalles égaux ou non : $m_n, m_{n-1}, \ldots, m_1$, de sorte que

$$m = m_n + m_{n-1} + \ldots + m_1,$$

le premier étant atteint à la $(\mu_{n-1})^{\text{ième}}$ partie, le second à la $(\mu_{n-2})^{\text{ième}}$ partie, le troisième à la $(\mu_{n-3})^{\text{ième}}$ partie, ..., on aura alors

$$\Pi_{\mu,(m_1+m_2+\ldots+m_n)} = \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu}\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1}\cdots\int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}}\int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}} \Pi_{\mu_{n-1},m_n}\Pi_{\mu_{n-2},m_{n-1}}\cdots$$
$$\times\,\Pi_{\mu_1-\mu_2,m_2}\Pi_{\mu-\mu_1,m_1}\,d\mu_{n-1}\,d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1$$

ou, en remplaçant les quantités H par leur valeur,

$$\begin{gathered}
\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)\,e^{-\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}} \\
=\int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu}\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1}\cdots\int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}}\int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}}\frac{(m_1 m_2 m_3\ldots m_n)}{(\sqrt{\pi})^n(\sqrt{\varphi_1})^n} \\
\times\frac{e^{-\frac{m_n^2}{\mu_{n-1}\varphi_1}-\frac{m_{n-1}^2}{(\mu_{n-2}-\mu_{n-1})\varphi_1}-\frac{m_{n-2}^2}{(\mu_{n-3}-\mu_{n-2})\varphi_1}-\ldots-\frac{m_1^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{[\mu_{n-1}(\mu_{n-2}-\mu_{n-1})(\mu_{n-3}-\mu_{n-2})\ldots(\mu-\mu_1)]^{\frac{3}{2}}}\,d\mu_{n-1}\,d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1.
\end{gathered}$$

En posant $m_n = z_n\sqrt{\varphi_1}$, $m_{n-1} = z_{n-1}\sqrt{\varphi_1}$, $\ldots$, cette formule devient

$$\begin{gathered}
\frac{(z_1+z_2+\ldots+z_n)\,e^{-\frac{(z_1+z_2+\ldots+z_n)^2}{\mu}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}} \\
=\int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu}\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1}\cdots\int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}}\int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}}\frac{z_1 z_2 z_3\ldots z_n}{(\sqrt{\pi})^n} \\
\times\frac{e^{-\frac{z_n^2}{\mu_{n-1}}-\frac{z_{n-1}^2}{\mu_{n-2}-\mu_{n-1}}-\frac{z_{n-2}^2}{\mu_{n-3}-\mu_{n-2}}-\ldots-\frac{z_1^2}{\mu-\mu_1}}}{[\mu_{n-1}(\mu_{n-2}-\mu_{n-1})(\mu_{n-3}-\mu_{n-2})\ldots(\mu-\mu_1)]^{\frac{3}{2}}}\,d\mu_{n-1}\,d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1.
\end{gathered}$$

La valeur de cette intégrale dont l'ordre de multiplicité est arbitraire est obtenue sans aucun calcul.

335. La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m est plus grand que m_1. La probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\mathrm{H}_{\mu_1,m_1}\varpi_{\mu-\mu_1,m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être atteinte pour la première fois à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, on a, en vertu du principe des probabilités totales

$$\varpi_{\mu,m}=\int_0^{\mu}\mathrm{H}_{\mu_1,m_1}\varpi_{\mu-\mu_1,m-m_1}\,d\mu_1$$

ou, en remplaçant les quantités Π et ϖ par leur valeur,

$$\frac{e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} = \int_0^{\mu} \frac{m_1 e^{-\frac{m_1^2}{\mu_1\varphi_1}}}{\mu_1\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1\varphi_1}} \, \frac{e^{-\frac{(m-m_1)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi_1}} \, d\mu_1.$$

Cette formule pourrait être obtenue, quoique péniblement, par les procédés ordinaires de l'analyse.

On peut d'ailleurs la généraliser en opérant comme précédemment (n° 334); on obtient finalement

$$\frac{e^{-\frac{(z_1+z_2+\ldots+z_n)^2}{\mu}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}}$$

$$= \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu} \int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1} \cdots \int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}} \int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}} \frac{z_2 z_3 \ldots z_n}{(\sqrt{\pi})^n}$$

$$\times \frac{e^{-\frac{z_n^2}{\mu_{n-1}} - \frac{z_{n-1}^2}{\mu_{n-2}-\mu_{n-1}} - \frac{z_{n-2}^2}{\mu_{n-3}-\mu_{n-2}} - \ldots - \frac{z_1^2}{\mu-\mu_1}}}{[\mu_{n-1}(\mu_{n-2}-\mu_{n-1})(\mu_{n-3}-\mu_{n-2})\ldots(\mu_1-\mu_2)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mu-\mu_1}} \, d\mu_{n-1}\, d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1.$$

Si l'on différentie cette égalité par rapport à z_1 on retrouve la formule précédemment obtenue (n° 334).

336. Si, dans l'intégrale simple ci-dessus, on pose

$$y^2 = \frac{a(m-m_1)}{m_1}\,\frac{\mu_1}{\mu-\mu_1},$$

on obtient après réductions l'intégrale connue

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2-\frac{a^2}{y^2}} \frac{dy}{y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2a}.$$

Si dans cette dernière on pose $x = \dfrac{a}{y}$, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

337. **Cas où il y a symétrie et non-uniformité.** — Si l'on suppose la continuité et l'indépendance, le fait pour un jeu d'être

équitable a pour conséquence la symétrie des probabilités (nº 271) même si le jeu n'est pas uniforme.

Il en résulte que la formule

$$\mathrm{P} = 2\mathfrak{P}$$

dont la démonstration (nº 320) suppose uniquement la symétrie est exacte même si le jeu n'est pas uniforme.

La probabilité $\mathfrak{P}_{\mu,m}$ ayant pour expression (nº 272)

$$\mathfrak{P}_{\mu,m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

on en déduit

$$\mathrm{P}_{\mu,m} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que le joueur soit ruiné en μ parties. On doit remarquer qu'elle est indépendante de l'ordre des parties.

Cette probabilité se calcule par les Tables de la fonction Θ.

338. Supposons qu'aucune limite ne soit fixée pour la durée du jeu; si $\varphi(\mu)$ croît indéfiniment avec μ la probabilité de ruine a pour valeur 1.

Si, au contraire, μ croissant indéfiniment, $\varphi(\mu)$ tend vers une limite finie, la probabilité de ruine n'est plus une certitude.

Ce résultat était à prévoir : si en effet la fonction d'instabilité $\varphi(\mu)$ formée par addition des quantités toutes positives $\varphi'(\mu)\,d\mu$ tend vers une limite finie, c'est que les instabilités $\varphi'(\mu)\,d\mu$ des diverses parties deviennent de plus en plus faibles. Elles sont par suite insuffisantes pour entraîner nécessairement la ruine du joueur si celui-ci a gagné au début du jeu, et c'est pourquoi la probabilité ne tend plus alors vers la certitude.

Il est du reste évident que, si l'instabilité devient nulle à partir d'une certaine partie, le jeu peut être considéré comme cessant à cette partie.

Dans ces conditions la probabilité de ruine ne peut être égale à l'unité.

339. La probabilité $\Pi_{\mu,m}$ pour que la ruine ait lieu exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour valeur

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{\partial P_{\mu,m}}{\partial \mu} = \frac{m\,\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\,d\mu;$$

$\varphi'(\mu)\,d\mu$ est l'instabilité de la $\mu^{\text{ième}}$ partie considérée isolément.

La probabilité pour que la ruine ait lieu exactement à une partie est proportionnelle à la fonction d'instabilité de cette partie considérée isolément.

340. Les problèmes relatifs à la distribution des probabilités et à l'espérance mathématique se traitent comme dans le cas des probabilités uniformes (n° 323) et ne présentent aucune particularité remarquable.

Si aucune limite n'est assignée pour la durée du jeu, la durée moyenne ou valeur moyenne du nombre des parties a pour expression

$$\int_0^{\infty} \mu\,\Pi\,d\mu = \int_0^{\infty} \frac{m\,\mu\,\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\,d\mu.$$

Cette intégrale n'est pas nécessairement infinie; si, par exemple, $\varphi(\mu) = h\mu^n$, la durée moyenne n'est infinie que si n est inférieur à 2.

Si donc le joueur augmente ses mises dans une proportion trop forte, la durée moyenne du jeu devient finie.

341. Un raisonnement analogue à celui qui a été employé (n° 334) permet d'écrire la formule

$$\begin{aligned}
&\frac{(z_1+z_2+\ldots+z_n)\,\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{(z_1+z_2+\ldots+z_n)^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}} \\
&= \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu} \int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1} \cdots \int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}} \int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}} \frac{z_1 z_2 \ldots z_n\,\varphi'(\mu)\,\varphi'(\mu_1)\,\varphi'(\mu_2)\ldots\varphi'(\mu_{n-1})}{(\sqrt{\pi})^n} \\
&\times \frac{e^{-\frac{z_n^2}{\varphi(\mu_{n-1})} - \frac{z_{n-1}^2}{\varphi(\mu_{n-2})-\varphi(\mu_{n-1})} - \frac{z_{n-2}^2}{\varphi(\mu_{n-3})-\varphi(\mu_{n-2})} - \ldots - \frac{z_1^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\{\varphi(\mu_{n-1})[\varphi(\mu_{n-2})-\varphi(\mu_{n-1})][\varphi(\mu_{n-3})-\varphi(\mu_{n-2})]\ldots[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]\}^{\frac{3}{2}}}\,d\mu_{n-1}\,d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1.
\end{aligned}$$

Je rappelle que la fonction $\varphi(\mu)$ dont $\varphi'(\mu)$ est la dérivée est arbitraire sous la seule condition d'être positive et croissante.

On généraliserait de même l'intégrale du n° 335; on obtiendrait

$$\frac{e^{-\frac{(z_1+z_2+\ldots+z_n)^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}$$

$$= \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu}\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1}\cdots\int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}}\int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}} \frac{(z_2 z_3 \ldots z_n)\,\varphi'(\mu_1)\,\varphi'(\mu_2)\ldots\varphi'(\mu_{n-1})}{(\sqrt{\pi})^n}$$

$$\times \frac{e^{-\frac{z_n^2}{\varphi(\mu_{n-1})}-\frac{z_{n-1}^2}{\varphi(\mu_{n-2})-\varphi(\mu_{n-1})}-\frac{z_{n-2}^2}{\varphi(\mu_{n-3})-\varphi(\mu_{n-2})}-\ldots-\frac{z_1^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\{\varphi(\mu_{n-1})[\varphi(\mu_{n-2})-\varphi(\mu_{n-1})][\varphi(\mu_{n-3})-\varphi(\mu_{n-2})]\ldots[\varphi(\mu_1)-\varphi(\mu_2)]\}^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\,d\mu_{n-1}\,d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1.$$

342. **Cas général de l'uniformité.** — Nous ne supposerons plus que le jeu soit équitable, mais nous supposerons qu'il est uniforme.

Nous allons chercher l'expression de la probabilité élémentaire du second genre $\Pi_{\mu,m}$, c'est-à-dire la probabilité pour que le joueur soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m_1 est inférieur à m. La probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{\mu_1,m_1}\times\varpi_{\mu-\mu_1,m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être pour la première fois atteinte à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, la probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{\mu,m}=\int_0^{\mu}\Pi_{\mu_1,m_1}\times\varpi_{\mu-\mu_1,m-m_1}\,d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

343. Les probabilités ϖ sont connues (n° 235); on a

$$\varpi_{\mu,m}=\frac{e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}},$$

ψ_1 et φ_1 désignant l'espérance totale et la fonction d'instabilité relatives à une partie.

Il est facile de voir que l'équation conditionnelle est vérifiée si l'on a

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m\, e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}.$$

Cette équation devient en effet

$$\frac{e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} = \int_0^{\mu} \frac{m_1\, e^{-\frac{(\mu_1\psi_1+m_1)^2}{\mu_1\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu_1\sqrt{\mu_1\varphi_1}} \frac{e^{-\frac{[(\mu-\mu_1)\psi_1+m-m_1]^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}\, d\mu_1;$$

le second membre peut s'écrire

$$e^{-\left[\mu\psi_1+\frac{2m\psi_1}{\varphi_1}\right]} \int_0^{\mu} \frac{m_1\, e^{-\frac{m_1^2}{\mu_1\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu_1\sqrt{\mu_1\varphi_1}} \frac{e^{-\frac{(m-m_1)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}\, d\mu_1;$$

l'intégrale est précisément celle que nous avons déterminée (n° 335); elle a pour valeur

$$\frac{e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}.$$

Le second membre de l'équation conditionnelle est donc

$$\frac{e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}};$$

il est identiquement égal au premier.

La probabilité pour que la ruine du joueur ait lieu exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ *partie a donc pour expression*

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m\, e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}\, d\mu.$$

344. Une autre équation conditionnelle ne contenant que les probabilités du second genre Π nous aurait conduit au même résultat.

La probabilité pour que la perte m soit atteinte pour la première fois à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été atteinte pour la première fois à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{\mu_1,m_1} \times \Pi_{\mu-\mu_1,\, m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être pour la première fois atteinte à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, on a, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\Pi_{\mu,m} = \int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1,m_1} \times \Pi_{\mu-\mu_1,m-m_1}\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

345. Il est facile de voir qu'elle est vérifiée si l'on pose

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m\, e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}};$$

elle devient en effet

$$\frac{m\, e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}} = \int_0^{\mu} \frac{m_1\, e^{-\frac{(\mu_1\psi_1+m_1)^2}{\mu_1\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu_1\sqrt{\mu_1\varphi_1}}\; \frac{(m-m_1)\, e^{-\frac{[(\mu-\mu_1)\psi_1+m-m_1]^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,(\mu-\mu_1)\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}\, d\mu_1,$$

et l'on peut écrire le second membre

$$e^{-\left[\mu\psi_1^2 + \frac{2m\psi_1}{\varphi_1}\right]} = \int_0^{\mu} \frac{m_1\, e^{-\frac{m_1^2}{\mu_1\varphi_1}}\,(m-m_1)\, e^{-\frac{(m-m_1)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu_1\sqrt{\mu_1\varphi_1}\sqrt{\pi}\,(\mu-\mu_1)\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}\, d\mu_1.$$

L'intégrale est précisément celle que nous avons déterminée (n° 334); elle a pour valeur

$$\frac{m\, e^{\frac{m^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}.$$

Le second membre de l'equation conditionnelle est donc

$$\frac{m\, e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}};$$

il est identique au premier.

On pourrait reprocher aux démonstrations précédentes de ne pas prouver que l'expression obtenue pour $\Pi_{\mu,m}$ est nécessairement la plus générale qui convienne au cas considéré. La démonstration qui sera exposée un peu plus loin, au n° 351, ne présente pas le même défaut.

346. **Probabilité totale du second genre.** — C'est la probabilité pour que le joueur soit ruiné en μ parties; c'est donc la quantité

$$P_{\mu,m} = \int_0^{\mu} \frac{m\, e^{-\frac{(\mu\psi_1 + m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}\, d\mu.$$

En posant

$$\frac{m^2}{\mu\varphi_1} = x^2,$$

l'intégrale devient

$$P_{\mu,m} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\left(x + \frac{m\psi_1}{\varphi_1}\frac{1}{x}\right)^2} dx.$$

Supposons le jeu désavantageux; $\frac{m\psi_1}{\varphi_1}$ est négatif; posant alors

$$x + \frac{m\psi_1}{\varphi_1}\frac{1}{x} = y,$$

il vient

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2 - \frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}}{2},$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{2} + \frac{y\, dy}{2\sqrt{y^2 - \frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

On a alors

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} \frac{y\, e^{-y^2}}{\sqrt{y^2 - \frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}}\, dy.$$

Si dans la dernière intégrale on pose

$$\sqrt{y^2 - \frac{4m\psi_1}{\varphi_1}} = z,$$

on a

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}} \int_{\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz.$$

La probabilité de la ruine en μ parties est donc

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}} \int_{\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

On obtiendrait la même formule en supposant le jeu avantageux.

Si l'on différentie cette formule par rapport à μ, on obtient $\Pi_{\mu,m}$, résultat évident.

347. La probabilité se calcule très facilement avec l'aide des Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2}\, dy.$$

Quatre cas sont à distinguer :

Le jeu est désavantageux ($\psi_1 < 0$) et m est inférieur à la valeur absolue de $\mu\psi_1$; alors

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{-m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right) + e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right)\right].$$

Le jeu est désavantageux et m est supérieur à la valeur absolue de $\mu\psi_1$; on a

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right) + e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right)\right].$$

Le jeu est avantageux ($\psi_1 > 0$) et m est inférieur à $\mu\psi_1$; alors

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right) + e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{-m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right)\right].$$

Le jeu est avantageux et m est plus grand que $\mu\psi_1$; on a

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right) + e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right)\right].$$

348. Cas où aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu. — Supposons qu'aucune limite ne soit fixée pour la durée du jeu; si celui-ci est désavantageux, $\mu\psi_1$ tend vers $-\infty$ et l'on a

$$\mathrm{P}_{\infty,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \, d\lambda = 1.$$

La probabilité de ruine est une certitude; nous le savions déjà, puisque la probabilité de ruine est une certitude même quand le jeu est équitable.

349. Si le jeu est avantageux, l'expression de $\mathrm{P}_{\mu,m}$ devient, en supposant μ infini,

$$e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}};$$

telle est l'expression de la probabilité totale de ruine. $\mathrm{P}_{\infty,m}$.

350. La durée moyenne du jeu est la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \mu\Pi \, d\mu = \int_0^{\infty} \frac{m\, e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} \, d\mu.$$

Si l'on pose

$$\frac{m^2}{\mu\varphi_1} = \lambda^2,$$

elle devient

$$\frac{2m^2 e^{-\frac{2m\psi_1}{\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi_1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 - \left(\frac{m\psi_1}{\varphi_1}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Elle est de la forme connue (nº 336)

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 - \frac{a^2}{\lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2a};$$

l'expression considérée se réduit donc à

$$-\frac{m}{\psi_1} e^{-\frac{2m\psi_1}{\varphi_1}} e^{+\frac{2m\psi_1}{\varphi_1}}.$$

La durée moyenne du jeu a donc pour valeur

$$-\frac{m}{\psi_1}.$$

Ce qui précède suppose le jeu désavantageux; lorsque le jeu est équitable, la durée moyenne est infinie. Il en est de même à plus forte raison quand le jeu est avantageux, car alors il y a une probabilité finie pour que le jeu ne se termine pas.

351. **Distribution des probabilités.** — On peut obtenir l'expression des probabilités du second genre en employant une méthode qui a l'avantage de faire connaître la distribution des probabilités, c'est-à-dire la valeur des probabilités relatives à tous les cas possibles.

Nous allons d'abord chercher la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur ait perdu la somme $m-y$ (qui est un gain si y est supérieur à m).

Si le joueur possédait une fortune infinie, la probabilité pour que sa perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait (n° 235)

$$(1) \qquad \varpi_{\mu,m-y} = \frac{e^{\frac{(\mu\psi_1+m-y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}.$$

La probabilité cherchée est égale à cette quantité diminuée d'une quantité correspondant à la possibilité de la ruine du joueur avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, quantité que nous allons calculer.

Si le joueur supposé ruiné à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie pouvait continuer à jouer, la probabilité pour que, dans les $\mu-\mu_1$ parties suivantes, il gagne la somme y et pour que, par suite, sa perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait $\varpi_{\mu-\mu_1,-y}$.

D'autre part, la probabilité pour que le joueur soit ruiné à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est $\Pi_{\mu_1,m}$.

La possibilité de la ruine du joueur à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie diminue donc, d'après le principe de la probabilité composée la probabilité $\varpi_{\mu,m-y}$, de la quantité

$$\Pi_{\mu_1,m} \times \varpi_{\mu-\mu_1,-y}\,d\mu_1,$$

et, puisque μ_1 peut prendre toutes les valeurs de zéro à μ, la probabi-

lité cherchée est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{\mu,m-y} = \int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1,m} \times \varpi_{\mu-\mu_1,-y}\, d\mu_1.$$

D'après la formule (1), on a

$$\varpi_{\mu-\mu_1,-y} = e^{\frac{4y\psi_1}{\varphi_1}} \varpi_{\mu-\mu_1,y}.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\varpi_{\mu,m-y} = e^{\frac{4y\psi_1}{\varphi_1}} \int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1,m} \varpi_{\mu-\mu_1,y}\, d\mu_1.$$

L'intégrale a pour valeur $\varpi_{\mu,m+y}$. En effet, la perte $m+y$ ne pouvant être atteinte sans que la perte m le soit d'abord, la probabilité pour que la perte soit $m+y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{\mu_1,m} \times \varpi_{\mu-\mu_1,y}.$$

La perte m pouvant être pour la première fois atteinte à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, la probabilité $\varpi_{\mu,m+y}$ pour que la perte soit $m+y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1,m} \times \varpi_{\mu-\mu_1,y}\, d\mu_1.$$

La probabilité pour que la perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est donc

$$\varpi_{\mu,m-y} = e^{\frac{4y\psi_1}{\varphi_1}} \varpi_{\mu,m+y}$$

ou

$$\frac{e^{-\frac{[\mu\psi_1+m-y]^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} - \frac{e^{-\frac{[\mu\psi_1+m+y]^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} e^{\frac{4y\psi_1}{\varphi_1}}.$$

352. La probabilité pour que y soit compris entre y_1 et ∞ est

$$\int_{y_1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{[\mu\psi_1+m-y]^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\, dy - \int_{y_1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{[\mu\psi_1+m+y]^2}{\mu\varphi_1}} e^{+\frac{4\mu y\psi_1}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\, dy.$$

En posant dans la première intégrale

$$\frac{\mu\psi_1 + m - y}{\sqrt{\mu\varphi_1}} = \lambda,$$

et dans la seconde

$$\frac{y + m - \mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}} = \lambda,$$

la probabilité a pour expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\mu\psi_1+m-y_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda - \frac{e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{y_1+m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Ces intégrales se calculent aisément à l'aide des Tables de la fonction Θ.

353. En posant $y_1 = 0$ on obtient la probabilité totale $1 - P_{\mu,m}$ pour que le joueur ne soit pas ruiné

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda - \frac{e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

On en déduit

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\int_{\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

En différentiant cette expression par rapport à μ, on obtient la probabilité élémentaire $\Pi_{\mu,m}$.

354. **Étude de l'espérance mathématique.** — L'espérance négative est la somme de deux termes, l'un $-Pm$ relatif au cas où le joueur est ruiné et l'autre

$$-\int_0^m \frac{(m-y)}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\left\{e^{-\frac{[\mu\psi_1+m-y]^2}{\mu\varphi_1}} - e^{-\frac{[\mu\psi_1+m+y]^2}{\mu\varphi_1}}\,e^{\frac{4\mu y\psi_1}{\mu\varphi_1}}\right\}dy$$

relatif au cas où le joueur a perdu une somme comprise entre zéro et m.

L'espérance positive a pour valeur

$$\int_m^\infty \frac{(y-m)}{\sqrt{\mu\varphi_1}} \left\{ e^{-\frac{[\mu\psi_1+m-y]^2}{\mu\varphi_1}} - e^{-\frac{[\mu\psi_1+m+y]^2}{\mu\varphi_1}} e^{\frac{4\mu y\psi_1}{\mu\varphi_1}} \right\} dy.$$

L'espérance totale est la somme des trois termes précédents.

355. Si ψ_1 est positif (jeu avantageux) et si $\mu\psi_1$ est très grand et très supérieur à m, l'espérance totale a pour valeur approchée

$$\mu\psi_1\left[1 - e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\right]$$

ou

$$\mu\psi_1(1 - \mathrm{P}_{\infty,m}),$$

$\mathrm{P}_{\infty,m}$ étant la probabilité totale de ruine pour μ infini.

Cette formule très simple montre que, si le nombre maximum des parties est très grand, l'espérance totale est proportionnelle à ce nombre et à la probabilité pour que le joueur ne soit pas ruiné.

Si $\psi_1 = 0$, l'espérance totale est nulle, résultat évident.

Si ψ_1 est négatif et si $-\mu\psi_1$ est très grand, l'espérance totale est $-m$.

356. **Cas général de non-uniformité.** — Il ne semble pas possible d'obtenir l'expression des probabilités du second genre dans le cas général de la non-uniformité; le problème ne comporte, au point de vue du calcul des probabilités, aucune complication spéciale, mais il conduit, quelle que soit la méthode employée, à des difficultés purement mathématiques qui paraissent insurmontables.

Il est cependant un cas plus général que ceux que nous avons considérés où les probabilités conservent une expression simple :

Nous supposerons que les fonctions $\psi(\mu)$ et $\varphi(\mu)$, qui désignent l'une l'espérance totale et l'autre l'instabilité, soient constamment proportionnelles.

On a alors $\psi(\mu) = k\varphi(\mu)$, et, comme $\varphi(\mu)$ est constamment croissant, $\psi(\mu)$ est constamment croissant ou décroissant suivant le signe de k.

Si k est nul, $\psi(\mu) = 0$ et le jeu est équitable. Le jeu considéré est

donc plus général qu'un jeu équitable quelconque admettant l'indépendance (n° 337).

Lorsque $\varphi(\mu)$ est proportionnel à μ, le jeu est uniforme. Le jeu que nous considérons est donc plus général qu'un jeu uniforme quel qu'il soit.

357. La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m_1 est inférieur à m.

La probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{0,\mu_1,m_1}\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}.$$

Cette expression est analogue à celle du n° 342; mais nous ne supposons plus maintenant que les probabilités ϖ et Π, dans l'intervalle μ_α, μ_β, ne dépendent que de $\mu_\beta-\mu_\alpha$ (ce serait admettre l'uniformité), nous supposons que ces probabilités dépendent plus généralement de μ_α et μ_β.

La perte m_1 pouvant être atteinte à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, la probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{0,\mu,m}=\int_0^\mu \Pi_{0,\mu_1,m_1}\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}\,d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

358. Les probabilités ϖ sont connues (n° 228); on a, par exemple, puisque $\psi(\mu)=k\varphi(\mu)$,

$$\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}=\frac{e^{-\frac{\{k[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]+m-m_1\}^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}$$

(la valeur de la fonction φ dans un intervalle μ_1, μ est $\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)$ puisque la fonction φ se forme par addition (n° 228).

Il est facile de voir que l'équation conditionnelle est vérifiée si

l'on a

$$\Pi_{0,\mu,m} = \frac{m\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}.$$

Cette équation conditionnelle devient en effet

$$\frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}} = \int_0^{\mu} \frac{m_1\varphi'(\mu_1)\, e^{\frac{[k\varphi(\mu_1)+m_1]^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}}\; \frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)-k\varphi(\mu_1)+m-m_1]^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\, d\mu_1;$$

le second membre peut s'écrire

$$e^{-[k^2\varphi(\mu)+2mk]} \int_0^{\mu} \frac{m_1\varphi'(\mu_1)\, e^{-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu_1)}}\, e^{-\frac{(m-m_1)^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\, d\mu_1;$$

l'intégrale est un cas particulier de celle du n° 341 et elle a pour valeur

$$\frac{e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}.$$

Le second membre de l'équation conditionnelle est donc

$$\frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}};$$

il est identiquement égal au premier.

La probabilité pour que la ruine du joueur ait lieu exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a donc pour expression

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\, d\mu;$$

elle est indépendante de l'ordre des parties qui précèdent la $\mu^{\text{ième}}$.

359. La probabilité pour que le joueur soit ruiné en μ parties s'obtient en intégrant l'expression précédente entre zéro et μ; on

obtient finalement

$$\mathrm{P}_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-4mk} \int_{\frac{m-k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda ;$$

cette probabilité se calcule sans peine par les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2}\, dy.$$

360. Supposons qu'aucune limite ne soit fixée pour la durée du jeu : si celui-ci est avantageux, c'est-à-dire si k est positif, et si de plus $\varphi(\mu)$ croît indéfiniment avec μ, on a

$$\mathrm{P}_{\infty,m} = e^{-4mk}.$$

Cette probabilité ne dépend pas de la fonction $\varphi(\mu)$.

Si k est négatif et si $\varphi(\mu)$ croît indéfiniment, on a $\mathrm{P}_{\infty,m} = 1$.

Enfin, si $\varphi(\mu)$ ne tend pas vers l'infini avec μ, on a

$$\mathrm{P}_{\infty,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+k\varphi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-4mk} \int_{\frac{m-k\varphi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

361. La durée moyenne du jeu est la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \mu \Pi\, d\mu = \int_0^{\infty} \frac{\mu m \varphi'(\mu)\, e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\, d\mu.$$

On ne peut la calculer sans préciser la fonction $\varphi(\mu)$. Si k est positif, la durée moyenne est infinie, puisqu'il existe alors une probabilité finie pour que le jeu ne se termine pas.

Les problèmes de la distribution de la probabilité et de la détermination des espérances mathématiques se traitent comme dans le cas du jeu uniforme; je ne crois pas utile de m'arrêter à ces questions.

362. **Écart maximum.** — Supposons que le joueur A ait une fortune infinie et qu'il joue μ parties aux conditions du problème pré-

cédent. Quelle est la probabilité pour que la perte maxima atteinte dans le courant des μ parties ait pour valeur m?

La probabilité cherchée est évidemment $-\frac{\partial P}{\partial m}$ ou

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{[m+k\varphi(\mu)]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\varphi(\mu)}} - \frac{4k\, e^{-4mk}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m-k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda;$$

lorsque le jeu est équitable ($k=0$), l'expression de la probabilité se réduit à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\varphi(\mu)}} = 2\varpi_{\mu,m}.$$

La valeur moyenne de la perte maxima est $\sqrt{\frac{\varphi(\mu)}{\pi}}$.

L'espérance d'un joueur H qui toucherait la plus grande perte serait donc $\sqrt{\frac{\varphi(\mu)}{\pi}}$.

L'espérance d'un joueur qui toucherait la plus grande perte et le plus grand gain, c'est-à-dire la somme des deux plus grands écarts, serait $2\sqrt{\frac{\varphi(\mu)}{\pi}}$.

Nous verrons plus loin (n° 385) que le joueur H' qui devrait toucher le plus grand des deux écarts aurait pour espérance $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varphi(\mu)}{\pi}}$.

363. Probabilités connexes du second genre. — Nous dirons qu'il y a connexité du second genre quand les conditions du jeu à chaque partie dépendent de la perte maxima que le joueur a subie avant cette partie.

Nous supposerons que le jeu soit équitable et caractérisé par la fonction d'instabilité φ_1 jusqu'à ce que la perte m_1 soit atteinte : ensuite le jeu sera caractérisé par la fonction d'instabilité φ_2 (φ_2 n'a pas la même signification que dans les questions précédentes, où il désignait la fonction d'instabilité de la seconde partie). Quelle est alors la probabilité pour que le joueur soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie?

La probabilité pour que le joueur perde pour la première fois la

somme m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, ayant perdu pour la première fois la somme m_1 à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{\mu_1, m_1, \varphi_1} \times \Pi_{\mu-\mu_1, m-m_1, \varphi_2}.$$

La perte m_1 ayant pu être atteinte pour la première fois à toutes les parties de zéro à μ, la probabilité cherchée est, en vertu du principe de la probabilité totale,

$$\int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1, m_1, \varphi_1} \times \Pi_{\mu-\mu_1, m-m_1, \varphi_2}\, d\mu_1$$

ou

$$\int_0^{\mu} \frac{m_1 e^{-\frac{m_1^2}{\mu_1 \varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu_1 \sqrt{\mu_1 \varphi_1}} \, \frac{(m-m_1) e^{-\frac{(m-m_1)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_2}}}{\sqrt{\pi}(\mu-\mu_1)\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi_2}}\, d\mu_1.$$

En posant $\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}} = z_1$ et $\frac{m - m_1}{\sqrt{\varphi_2}} = z_2$, cette intégrale devient

$$\int_0^{\mu} \frac{z_1 e^{-\frac{z_1^2}{\mu_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu_1 \sqrt{\mu_1}} \, \frac{z_2 e^{-\frac{z_2^2}{(\mu-\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}(\mu-\mu_1)\sqrt{(\mu-\mu_1)}}\, d\mu_1,$$

et, d'après la formule du n° 334, sa valeur est

$$\frac{z_1+z_2}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}} e^{-\frac{(z_1+z_2)^2}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}} \left(\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}} + \frac{m-m_1}{\sqrt{\varphi^2}} \right) e^{-\frac{1}{\mu}\left(\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}} + \frac{m-m_1}{\sqrt{\varphi_2}}\right)^2}.$$

Si l'intervalle m est divisé en deux intervalles m_1 et m_2 auxquels correspondent les instabilités φ_1 et φ_2, la probabilité pour que la perte $m_1 + m_2$ soit atteinte à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est donc

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}} \left(\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}} + \frac{m_2}{\sqrt{\varphi_2}} \right) e^{-\frac{1}{\mu}\left(\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}} - \frac{m_2}{\sqrt{\varphi_2}}\right)^2}.$$

364. Si l'intervalle m était divisé en trois intervalles m_1, m_2, m_3 égaux ou non auxquels correspondraient les instabilités φ_1, φ_2, φ_3, la probabilité de ruine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait

$$\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu} \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu_2} \frac{m_1 e^{-\frac{m_1^2}{\mu_1\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu_1\sqrt{\mu_1\varphi_1}} \, \frac{m_2 e^{-\frac{m_2^2}{(\mu_2-\mu_1)\varphi_2}}}{\sqrt{\pi}(\mu_2-\mu_1)\sqrt{(\mu_2-\mu_1)\varphi_2}} \, \frac{m_3 e^{-\frac{m_3^2}{(\mu-\mu_2)\varphi_3}}}{\sqrt{\pi}(\mu-\mu_2)\sqrt{(\mu-\mu_2)\varphi_3}}\, d\mu_1\, d\mu_2,$$

c'est-à-dire, d'après l'intégrale du n° 334,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}}\left(\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}}+\frac{m_2}{\sqrt{\varphi_2}}+\frac{m_3}{\sqrt{\varphi_3}}\right)e^{-\frac{1}{\mu}\left[\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}}+\frac{m_2}{\sqrt{\varphi_2}}+\frac{m_3}{\sqrt{\varphi_3}}\right]^2}.$$

Si l'intervalle m était divisé en plusieurs intervalles $m_1, m_2, m_3, \ldots,$ auxquels correspondraient les instabilités $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, la probabilité de ruine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}}\left(\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}}+\frac{m_2}{\sqrt{\varphi_2}}+\frac{m_3}{\sqrt{\varphi_3}}+\ldots\right)e^{-\frac{1}{\mu}\left[\frac{m_1}{\sqrt{\varphi_1}}+\frac{m_2}{\sqrt{\varphi_2}}+\frac{m_3}{\sqrt{\varphi_3}}+\ldots\right]^2}.$$

365. Si l'on suppose que φ varie d'une façon continue quand la perte x varie de zéro à m, de telle sorte que, dans l'intervalle x, $x+dx$, la valeur de φ soit $\varphi(x)$, la probabilité de la ruine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est

$$\Pi_{\mu,m}=\frac{1}{\mu\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}}\left[\int_0^m\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]e^{-\frac{1}{\mu}\left[\int_0^m\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2}d\mu.$$

Telle est l'expression de la probabilité élémentaire Π *dans le cas de la connexité du second genre.*

Pour conserver à notre théorie toute sa généralité, nous ne particulariserons pas la fonction φ; nous la considérerons comme arbitraire, sous la condition d'être positive.

366. La probabilité $P_{\mu,m}$ pour que la ruine ait lieu avant μ parties est exprimée par l'intégrale

$$P_{\mu,m}=\int_0^{\mu}\frac{1}{\mu\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}}\left[\int_0^m\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]e^{-\frac{1}{\mu}\left[\int_0^m\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2}d\mu.$$

En posant

$$\frac{1}{\mu}\left[\int_0^m\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2=\lambda^2,$$

on a

$$P_{\mu,m}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^m\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}}e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Cette valeur se calcule aisément par les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-y^2}\,dy$$

dès que l'intégration de la limite supérieure est effectuée.

Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, $P_{\infty,m}$ a pour valeur 1 ; la ruine du joueur est certaine.

La durée moyenne du jeu

$$\int_0^\infty \mu\,\Pi_{\mu,m}\,d\mu$$

est infinie.

367. Nous supposons maintenant que le joueur possède une fortune infinie, qu'il joue à un jeu équitable et que, à chaque partie, les conditions du jeu dépendent de la perte maxima obtenue avant cette partie. Quelle est la probabilité pour que ce joueur perde la somme z en jouant μ parties?

Nous désignerons, comme précédemment, par $\varphi(x)$ la fonction d'instabilité pour une partie quand la perte maxima antérieure est x.

Nous déterminerons d'abord la probabilité pour que la perte maxima dans les μ parties soit x, pour qu'elle soit de plus atteinte à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie et pour que, finalement, la perte soit z à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

La probabilité pour que la perte x soit atteinte pour la première fois à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est, d'après le résultat obtenu au n° 365,

$$\Pi_{\mu_1,x} = \frac{\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]}{\mu_1\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1}}\,e^{-\frac{1}{\mu_1}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2}\,d\mu_1.$$

La fonction $\int^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ que nous laisserons arbitraire est une donnée du problème ; elle exprime la loi de la variation des instabilités avec la perte maxima x.

La perte x étant atteinte à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, il faut que dans les $\mu - \mu_1$ parties qui restent à jouer : 1° la perte x ne soit pas dépassée, c'est-à-dire que la perte $x + dx$ ne soit pas atteinte ; 2° il faut que la perte ait pour valeur z à la $\mu^{\text{ième}}$ partie et que, par suite, dans les $\mu - \mu_1$ parties qui restent à jouer, il se produise le gain $x - z$.

La probabilité pour que ces éventualités se réalisent est facile à obtenir, car l'instabilité reste constante pendant les $\mu - \mu_1$ dernières parties, et, d'autre part, nous savons calculer la probabilité pour que, la perte dx n'étant jamais atteinte en $\mu - \mu_1$ parties, le gain soit finalement $x - z$. C'est le problème de la distribution de la probabilité qui a été résolu très simplement (n° 323). Cette dernière probabilité a pour valeur

$$\varpi_{\mu-\mu_1,\, x-z} - \varpi_{\mu-\mu_1,\, x-z+2dx}$$

ou

$$-2\,dx\,\frac{\partial \varpi}{\partial x};$$

$\varpi_{\mu-\mu_1,\, x-z}$ a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{(x-z)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi(x)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi(x)}}.$$

Dans la différentiation en x nous devons considérer $\varphi(x)$ comme constant, puisqu'il désigne l'instabilité à partir de la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie. On a donc

$$-2\,dx\,\frac{\partial \varpi}{\partial x} = \frac{4(x-z)\,e^{-\frac{(x-z)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi(x)}}}{\sqrt{\pi}\,(\mu-\mu_1)\,\varphi(x)\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi(x)}}\,dx.$$

La probabilité pour que la perte maxima dans les μ parties soit x, pour que cette perte maxima soit atteinte à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie et pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte soit z est donc, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2}{\mu_1\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1}}\, e^{-\frac{1}{\mu_1}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2} \frac{4(x-z)\,e^{-\frac{(x-z)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi(x)}}}{\sqrt{\pi}\,(\mu-\mu_1)\,\varphi(x)\sqrt{(\mu-\mu_1)\,\varphi(x)}}\,dx\,d\mu_1.$$

La perte x ayant pu être atteinte à toutes les parties depuis $\mu_1 = 0$ jusqu'à $\mu_1 = \mu$ et, d'autre part, la perte maxima x pouvant avoir toutes les valeurs depuis z jusqu'à l'infini, la probabilité pour que la perte soit z à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_{x=z}^{x=\infty}\int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu} \frac{\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}}{\mu_1\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1}}\, e^{-\frac{1}{\mu_1}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2} \frac{4(x-z)\,e^{-\frac{(x-z)^2}{(\mu-\mu_1)\varphi(x)}}}{\sqrt{\pi}\,(\mu-\mu_1)\,\varphi(x)\sqrt{(\mu-\mu_1)\,\varphi(x)}}\,dx\,d\mu_1.$$

La formule du n° 334 permet l'intégration par rapport à μ_1 et l'expression se réduit à

$$\int_z^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varphi(x)\,\mu\sqrt{\mu}} \left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x-z}{\sqrt{\varphi(x)}}\right] e^{-\frac{1}{\mu}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x-z}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2} dx.$$

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, on réalise le gain z' est de même

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varphi(x)\,\mu\sqrt{\mu}} \left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x+z'}{\sqrt{\varphi(x)}}\right] e^{-\frac{1}{\mu}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} - \frac{x+z'}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2} dx.$$

Ces deux formules donnent la solution du problème proposé.

368. Dans le cas où $\varphi(x)$ est constant et égal à φ_1, les deux formules conduisent à l'expression connue

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dz,$$

résultat évident.

369. Supposons que $\varphi(x)$ ait une valeur constante φ_1 tant que x est inférieur à m et que $\varphi(x)$ devienne nul (et que, par conséquent, le jeu cesse) dès que x atteint la valeur m.

Pour obtenir la probabilité du gain z', on doit considérer la seconde formule et effectuer l'intégration entre zéro et m (puisque x ne peut dépasser m); on obtient alors finalement pour expression de la probabilité

$$\frac{e^{-\frac{z'^2}{\mu\varphi_1}}\,dz'}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} - \frac{e^{-\frac{(z'+2m)^2}{\mu\varphi_1}}\,dz'}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}},$$

résultat connu (n° 323).

370. Jusqu'ici nous avons supposé le jeu équitable; nous ne traiterons, relativement aux jeux non équitables, que deux problèmes : celui qui consiste à chercher la probabilité totale de ruine quand aucune limite n'est assignée pour la durée du jeu, et celui qui a pour but de

déterminer la durée moyenne du jeu quand aucune limite n'est fixée pour cette durée.

371. Occupons-nous du premier problème; supposons que le jeu soit caractérisé par les fonctions ψ_1 et φ_1 jusqu'à ce que le joueur ait perdu la somme x, $(x < m)$, puis qu'il soit caractérisé par les fonctions ψ_x et φ_x.

Le joueur ne peut être ruiné possédant la somme m sans avoir d'abord perdu la somme x; la probabilité pour qu'il se ruine possédant la somme m est donc égale, d'après le principe de la probabilité composée, au produit de la probabilité pour qu'il se ruine possédant la somme x par la probabilité pour qu'il se ruine possédant la somme $m - x$; on a donc

$$P_{\infty,m} = \underset{\varphi_1,\psi_1}{P_{\infty,x}} \times \underset{\varphi_x,\psi_x}{P_{\infty,m-x}}.$$

Si par exemple ψ_1 et ψ_x sont négatifs, le jeu est désavantageux avant la perte x comme après; $P_{\infty,x}$ et $P_{\infty,m-x}$ ont chacun pour valeur 1, et par suite $P_{\infty,m}$ a pour valeur 1.

Si le jeu est désavantageux ou équitable avant la perte x et avantageux après, on a (n° 349)

$$\underset{\varphi_1,\psi_1}{P_{\infty,x}} = 1, \qquad \underset{\varphi_x,\psi_x}{P_{\infty,m-x}} = e^{-\frac{2(m-x)\psi_x}{\varphi_x}},$$

et par suite

$$P_{\infty,m} = e^{-\frac{2(m-x)\psi_x}{\varphi_x}}.$$

Si le jeu est avantageux avant la perte x comme après, on a

$$\underset{\varphi_1,\psi_1}{P_{\infty,x}} = e^{-\frac{2x\psi_1}{\varphi_1}}, \qquad \underset{\varphi_x,\psi_x}{P_{\infty,m-x}} = e^{-\frac{2(m-x)\psi_x}{\varphi_x}},$$

et par suite

$$P_{\infty,m} = e^{-\frac{2x\psi_1}{\varphi_1} - \frac{2(m-x)\psi_x}{\varphi_x}}.$$

372. Supposons pour fixer les idées que le jeu soit constamment avantageux, qu'il soit caractérisé par φ_{x_1} et ψ_{x_1} tant que la perte totale est inférieure à x_1, puis par φ_{x_2} et ψ_{x_2} tant que la perte totale reste inférieure à $x_1 + x_2$, puis par φ_{x_3} et ψ_{x_3} tant que la perte totale reste inférieure à $x_1 + x_2 + x_3$, etc. On a, en vertu du principe des proba-

bilités composées,

$$P_{x,m} = P_{\substack{x,x_1 \\ \varphi_{x_1},\psi_{x_1}}} \times P_{\substack{x,x_2 \\ \varphi_{x_2},\psi_{x_2}}} \times P_{\substack{\infty,x_3 \\ \varphi_{x_3},\psi_{x_3}}} \times \ldots,$$

c'est-à-dire

$$P_{x,m} = e^{-4\left[\frac{x_1\psi_{x_1}}{\varphi_{x_1}} + \frac{x_2\psi_{x_2}}{\varphi_{x_2}} + \frac{x_3\psi_{3}}{3} + \ldots\right]}.$$

On peut supposer que φ et ψ varient d'une façon continue avec x; alors

$$P_{\infty,m} = e^{-4\int_0^m \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}dx}.$$

Cette expression convient dans tous les cas, que le jeu soit constamment avantageux ou non, pourvu que, dans l'intégrale, les éléments négatifs soient considérés comme nuls.

373. Occupons-nous de la détermination de la durée moyenne.

Il faut d'abord remarquer que, si les conditions du jeu sont telles que celui-ci puisse, à un moment quelconque, devenir équitable ou avantageux, la durée moyenne est infinie (n° 350).

Nous devons donc nous borner au cas où le jeu est constamment désavantageux.

Si le jeu est caractérisé par les fonctions ψ_1 et φ_1 jusqu'à ce que la perte totale x soit atteinte, puis par les fonctions ψ_x et φ_x, la durée moyenne est

$$-\frac{x}{\psi_1} - \frac{m-x}{\psi_x}.$$

La perte totale m ne peut en effet être réalisée sans que la perte x soit atteinte auparavant. La durée moyenne pour que la perte x soit atteinte est $-\frac{x}{\psi_1}\cdot$ Au moment où elle est atteinte, la durée moyenne est $-\frac{m-x}{\psi_x}\cdot$ L'expression précédente est donc exacte.

374. On peut supposer aussi que le jeu soit caractérisé par φ_{x_1} et ψ_{x_1} jusqu'à la perte totale x_1, puis par φ_{x_2} et ψ_{x_2} jusqu'à la perte totale $x_1 + x_2$, puis par φ_{x_3} et ψ_{x_3} jusqu'à la perte totale $x_1 + x_2 + x_3$, etc.

La durée moyenne est alors

$$-\frac{x_1}{\psi_{x_1}}-\frac{x_2}{\psi_{x_2}}-\frac{x_3}{\psi_{x_3}}-\ldots.$$

Si ψ est une fonction continue de x, la durée moyenne est

$$-\int_0^m \frac{dx}{\psi(x)}.$$

CHAPITRE XI.

PROBABILITÉS CONTINUES DU TROISIÈME GENRE.

375. Dans la théorie des probabilités du premier genre, la variable x, qui exprime la perte ou le gain d'un joueur, est susceptible de prendre toutes les valeurs.

Dans la théorie des probabilités du second genre les variations de x sont limitées dans un sens, et dans la théorie des probabilités du troisième genre ces variations sont limitées dans les deux sens.

Nous supposerons un joueur A possédant la somme m que nous appellerons sa *fortune*, jouant contre un adversaire B possédant la fortune n, chacun des joueurs devant régler les différences après chaque partie.

On peut aussi supposer que le joueur A qui possède la fortune m joue contre plusieurs adversaires de fortunes infinies et qu'il convient d'avance de cesser de jouer quand il aura gagné la somme n. Son sort est le même que s'il jouait contre un seul adversaire B possédant la fortune n.

Si μ parties doivent être jouées au maximum, trois cas peuvent se présenter : le joueur A peut être ruiné, le joueur B peut être ruiné, ou enfin les deux joueurs peuvent n'être ruinés ni l'un ni l'autre.

Les principaux problèmes que nous aurons à résoudre sont les suivants :

1° Quelle est la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ pour que le joueur A soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie?

La quantité $\Pi_{\mu,m,n}$ est la probabilité élémentaire du troisième genre.

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'exprime par $\Omega_{\mu,n,m}$.

$\Pi_{\mu,m,n}$ et $\Omega_{\mu,n,m}$ se déduisent l'un de l'autre en substituant m à n et n à m et en remarquant que les conditions du jeu relatives au joueur B sont l'inverse des conditions relatives au joueur A.

Lorsque le jeu est symétrique, on peut écrire simplement $\Pi_{\mu,n,m}$ au lieu de $\Omega_{\mu,n,m}$.

La probabilité pour que le jeu prenne fin à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est $\Pi_{\mu,m,n} + \Omega_{\mu,n,m}$.

2° Quelle est la probabilité $P_{\mu,m,n}$ pour que le joueur A soit ruiné en μ parties?

$P_{\mu,m,n}$ est la probabilité du troisième genre.

Les probabilités $P_{\mu,m,n}$ et $\Pi_{\mu,m,n}$ se déduisent l'une de l'autre; on a

$$P_{\mu,m,n} = \int_0^{\mu} \Pi_{\mu,m,n}\, d\mu \qquad \text{et} \qquad \Pi_{\mu,m,n} = \frac{\partial P_{\mu,m,n}}{\partial \mu}.$$

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné en μ parties se désigne par $Q_{\mu,n,m}$; on a évidemment

$$Q_{\mu,n,m} = \int_0^{\mu} \Omega_{\mu,n,m}\, d\mu \qquad \text{et} \qquad \Omega_{\mu,n,m} = \frac{\partial Q_{\mu,n,m}}{\partial \mu}.$$

La probabilité pour que le jeu prenne fin avant μ parties est

$$P_{\mu,m,n} + Q_{\mu,n,m}.$$

La probabilité pour que le jeu ne soit pas terminé en μ parties est

$$1 - P_{\mu,m,n} - Q_{\mu,n,m}.$$

3° Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, quelle est la probabilité de ruine de chacun des joueurs et quelle est la durée moyenne du jeu?

4° Si μ parties au maximum doivent être jouées, quelle est la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu une somme x et quelle est l'espérance mathématique de ce joueur?

Nous résoudrons d'abord ces problèmes en supposant le jeu équitable et uniforme, puis équitable et quelconque. Nous étudierons ensuite le cas où le jeu n'est pas équitable.

376. **Cas où il y a symétrie et uniformité.** — *Le joueur A possédant la somme m et le joueur B la somme n, quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par la ruine du joueur A?*

Nous supposons que le jeu est équitable, et, comme la probabilité est continue, cela revient à le considérer comme symétrique (n° 239).

La probabilité cherchée s'exprime par $\Pi_{\mu,m,n}$; nous pouvons poser en première approximation

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty}.$$

La quantité $\Pi_{\mu,m,\infty}$ a pour valeur (n° 322)

$$\Pi_{\mu,m,\infty} = \frac{m e^{-\frac{m^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}\,d\mu.$$

Rappelons que φ_1 est la fonction d'instabilité relative à une partie, c'est-à-dire, pour le jeu équitable, le double de la valeur moyenne des carrés des pertes relatives à cette partie.

La formule

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty}$$

donne, pour la probabilité cherchée, une valeur trop forte; de toutes les séries d'alternatives de gain et de perte produisant la ruine du joueur A exactement en μ parties, nous devons retrancher celles qui produiraient précédemment la ruine du joueur B.

Si le joueur B, quand il est ruiné, pouvait continuer à jouer jusqu'à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, il y aurait probabilité égale pour qu'il gagnât la somme $m+n$ et qu'il ruinât le joueur A, ou pour qu'il perdît encore la somme $m+n$, ce qui porterait sa perte à $m+2n$.

A chaque série d'alternatives de gain et de perte qui produit la ruine du joueur B et qui aurait ensuite produit celle du joueur A correspond une série qui donnerait au joueur B la perte $m+2n$ s'il possédait cette somme; et comme aucune des premières séries ne ruine le joueur A avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, aucune des secondes ne ruinerait le joueur B avant cette $\mu^{\text{ième}}$ partie, s'il possédait la somme $m+2n$. Ceci nous incite à poser en seconde approximation

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty}.$$

La quantité $\Pi_{\mu,m+2n,\infty}$ que nous avons retranchée est trop forte, car nous avons retranché les séries produisant la ruine du joueur B supposé posséder la somme $m+2n$, alors que nous n'aurions dû tenir compte parmi elles que de celles qui ne causent pas d'abord la ruine du joueur A.

Or, si le joueur A supposé d'abord ruiné avait pu continuer à jouer, il n'est ni plus ni moins probable qu'il eût gagné la somme $2m+2n$ qui aurait amené la ruine de B, qu'il n'est probable qu'il eût perdu cette somme $2m+2n$, ce qui aurait porté sa perte à $3m+2n$.

On doit donc poser en troisième approximation

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty} + \Pi_{\mu,3m+2n,\infty},$$

et ainsi de suite, on a donc

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty} + \Pi_{\mu,3m+2n,\infty} - \Pi_{\mu,3m+4n,\infty} + \Pi_{\mu,5m+4n,\infty} - \ldots$$

Cette série convergente exprime la probabilité cherchée.

377. **Probabilité totale.** — *Le joueur A possède la somme m et le joueur B la somme n; quelle est la probabilité pour que le jeu se termine avant μ parties par la ruine du joueur A?*

La probabilité cherchée dite *probabilité du troisième genre* $P_{\mu,m,n}$ est la somme des probabilités $\Pi_{\mu,m,n}$ de zéro à μ; on a donc

$$P_{\mu,m,n} = \int_0^{\mu} \Pi_{\mu,m,n}\,d\mu = \int_0^{\mu} \Pi_{\mu,m,\infty}\,d\mu - \int_0^{\mu} \Pi_{\mu,m+2n,\infty}\,d\mu + \int_0^{\mu} \Pi_{\mu,3m+2n,\infty}\,d\mu - \ldots$$

La probabilité cherchée est donc

$$P_{\mu,m,n} = P_{\mu,m,\infty} - P_{\mu,m+2n,\infty} + P_{\mu,3m+2n,\infty} - P_{\mu,3m+4n,\infty} + P_{\mu,5m+4n,\infty} + P_{\mu,5m+6n,\infty} - \ldots$$

Les quantités $P_{\mu,z,\infty}$ étant données par la formule connue (n° 321),

$$P_{\mu,z,\infty} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{\mu\varphi_1}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

dont la valeur numérique s'obtient immédiatement par les tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-y^2}\,dy,$$

on a

$$P_{\mu.m.n} = \left[1-\Theta\left(\frac{m}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right)\right] - \left[1-\Theta\left(\frac{m+2n}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right)\right] + \left[1-\Theta\left(\frac{3m+2n}{\sqrt{\mu\varphi_1}}\right)\right] - \ldots.$$

378. La probabilité pour que le joueur B soit ruiné en μ parties est

$$P_{\mu.n.m} = P_{\mu.n.\infty} - P_{\mu.n+2m.\infty} + P_{\mu.3n+2m.\infty} - P_{\mu.3n+4m.\infty} + \ldots.$$

La probabilité pour que le jeu se termine avant μ parties a pour valeur

$$P_{\mu.m.n} + P_{\mu.n.m},$$

et la probabilité pour qu'il ne soit pas terminé avant μ parties est

$$1 - P_{\mu.m.n} - P_{\mu.n.m}.$$

379. Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, les probabilités $P_{\infty.m.n}$ et $P_{\infty.n.m}$ prennent la forme indéterminée

$$P_{\infty.m.n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

mais il est facile de les déterminer directement. On a (n° 13)

$$P_{\infty.m.n} = \frac{n}{m+n}, \qquad P_{\infty.n.m} = \frac{m}{m+n}.$$

380. **Cas où il y a symétrie et non-uniformité.** — Si l'on suppose la continuité, le fait pour un jeu d'être équitable a pour conséquence la symétrie de la probabilité, même quand le jeu n'est pas uniforme (n° 271); il en résulte que les formules

$$\Pi_{\mu.m.n} = \Pi_{\mu.m.\infty} - \Pi_{\mu.m+2n.\infty} + \Pi_{\mu.3m+2n.\infty} - \ldots$$

et

$$P_{\mu.m.n} = P_{\mu.m.\infty} - P_{\mu.m+2n.\infty} + P_{\mu.3m+2n.\infty} - \ldots,$$

dont la démonstration suppose uniquement la symétrie, sont exactes, même si le jeu n'est pas uniforme.

On a (n° 339)

$$\Pi_{\mu,x,x} = \frac{x\varphi'(\mu)e^{-\frac{x^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}d\mu;$$

$\varphi(\mu)$ est la fonction d'instabilité relative à μ parties.

On voit que $\Pi_{\mu,m,n}$ et $\Pi_{\mu,n,m}$ sont proportionnels à $\varphi'(\mu)$. La probabilité pour que le jeu se termine à une certaine partie est proportionnelle à la fonction d'instabilité de cette partie considérée isolément.

Les probabilités P sont données par la formule (n° 337)

$$P_{\mu,x,x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

381. Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, les formules $P_{\infty,m,n}$ et $P_{\infty,n,m}$ font connaître les probabilités totales de ruine, si $\varphi(\mu)$ tend, pour μ infini, vers une limite fixe.

Dans ce cas, la somme des probabilités $P_{\infty,m,n}$ et $P_{\infty,n,m}$ n'est pas égale à l'unité; la probabilité $1 - P_{\infty,m,n} - P_{\infty,n,m}$ pour que le jeu dure indéfiniment a une valeur finie. Ce résultat est presque évident et s'explique comme celui du n° 338.

Si $\varphi(\mu)$ croît indéfiniment avec μ, les formules qui précèdent prennent la forme indéterminée

$$P_{\infty,m,n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

et les probabilités sont alors obtenues par la considération de l'espérance mathématique (n° 13); on a

$$P_{\infty,m,n} = \frac{n}{m+n}, \qquad P_{\infty,n,m} = \frac{m}{m+n}.$$

382. **Écart maximum.** — On suppose un joueur H ayant une fortune infinie et jouant μ parties.

Quelle est la probabilité pour que, dans le cours de μ parties, le plus grand écart, dans un sens ou dans l'autre, ait une valeur donnée m?

Si l'on imagine deux joueurs A et B jouant aux mêmes conditions que H et faisant la contre-partie l'un de l'autre, l'un de ces joueurs

sera nécessairement ruiné avant μ parties si ces joueurs possèdent la fortune $m + dm$. Aucun d'eux, au contraire, ne sera ruiné si ces joueurs possèdent la fortune m.

La probabilité de l'écart maximum m est ainsi

$$\frac{\partial}{\partial m}(1 - 2\mathrm{P}_{\mu,m,m})$$

ou

$$\frac{4\,dm}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\left(e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}} - 3e^{-\frac{(3m)^2}{\varphi(\mu)}} + 5e^{-\frac{(5m)^2}{\varphi(\mu)}} - 7e^{-\frac{(7m)^2}{\varphi(\mu)}} + \ldots\right).$$

On peut obtenir le même résultat en raisonnant de la façon suivante :

La probabilité pour que l'écart m soit atteint pour la première fois à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est $\mathrm{H}_{0,\mu_1,m}$; supposons par exemple que cet écart soit une perte; pour que l'écart m ne soit pas dépassé dans les $\mu - \mu_1$ parties qui restent à jouer, il faut que la perte $m + dm$ ne soit pas atteinte et que le gain ne dépasse pas $2m$. La probabilité d'une telle éventualité est

$$1 - \mathrm{P}_{\mu_1,\mu,dm,2m} - \mathrm{P}_{\mu_1,\mu,2m,dm}.$$

La probabilité pour que le plus grand écart soit m et pour qu'il se produise à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est donc, en vertu du principe des probabilités composées,

$$2\mathrm{H}_{0,\mu_1,m}(1 - \mathrm{P}_{\mu_1,\mu,dm,2m} - \mathrm{P}_{\mu_1,\mu,2m,dm}).$$

L'écart m pouvant se produire à toutes les parties de zéro à μ, la probabilité cherchée est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_0^{\mu} 2\mathrm{H}_{0,\mu_1,m}(1 - \mathrm{P}_{\mu_1,\mu,dm,2m} - \mathrm{P}_{\mu_1,\mu,2m,dm})\,d\mu_1.$$

En effectuant l'intégration, on est conduit au même résultat que précédemment.

383. Seconde courbe de probabilité. — La probabilité pour que l'écart maximum soit x en μ parties,

$$y = \frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\left(e^{-\frac{x^2}{\varphi(\mu)}} - 3e^{-\frac{(3x)^2}{\varphi(\mu)}} + 5e^{-\frac{(5x)^2}{\varphi(\mu)}} - \ldots\right),$$

peut être représentée par une courbe : cette courbe est tangente à l'axe des x à l'origine, et à l'infini, elle présente quatre points d'inflexion ; l'ordonnée est maxima lorsque $x = 0,642\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}$.

La valeur la plus probable de l'écart maximum est $0,642\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}$.

Lorsque x est très grand, la série se réduit à son premier terme, et la probabilité pour que l'écart maximum soit x dans le cours des μ parties est le double de la probabilité pour que l'écart final soit x.

La probabilité maxima, c'est-à-dire l'ordonnée maxima de la courbe, décroît comme $\frac{1}{\sqrt{\varphi(\mu)}}$.

Les abscisses des points d'inflexion croissent proportionnellement à $\sqrt{\varphi(\mu)}$.

384. Si l'on considère un écart m fixe, sa probabilité, lorsque μ augmente, croît jusqu'à une certaine valeur et décroît ensuite. La probabilité maxima a lieu lorsque $m = 0,783\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}$. μ continuant à croître, la probabilité de l'écart m décroît ; elle a déjà décru de $\frac{1}{10}$ environ lorsqu'elle devient maxima *relativement aux autres*, c'est-à-dire lorsqu'elle correspond au sommet de la courbe de probabilité ; on a alors

$$m = 0,642\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}.$$

385. **Second écart moyen.** — Le second écart moyen est la valeur moyenne du plus grand des écarts qui se sont produits pendant les μ parties ; il a pour expression

$$\int_0^\infty m\frac{\partial}{\partial m}(1 - 2\,\mathrm{P}_{\mu,m,m})\,dm$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{4m}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\left(e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}} - 3e^{-\frac{(3m)^2}{\varphi(\mu)}} + 5e^{-\frac{(5m)^2}{\varphi(\mu)}} - \ldots\right)dm.$$

Cette quantité est une somme d'intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{4\alpha m e^{-\frac{(\alpha m)^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dm = -\left|\frac{2\sqrt{\varphi(\mu)}}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\alpha^2 m^2}{\varphi(\mu)}}\right|_0^\infty = \frac{2\sqrt{\varphi(\mu)}}{\alpha\sqrt{\pi}};$$

elle a donc pour valeur

$$\frac{2\sqrt{\varphi(\mu)}}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$$

Du développement connu

$$\operatorname{arc\,tang} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

on déduit, en posant $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang} 1 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

Le second écart moyen a donc pour valeur

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\varphi(\mu)};$$

il est proportionnel à la racine carrée de la fonction d'instabilité et égal au premier écart moyen multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

Si le jeu est uniforme, le second écart moyen a pour valeur

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\mu\varphi_1};$$

il est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties.

386. **Second écart probable.** — Le second écart probable est celui qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassé dans le cours de μ parties.

Il est donc défini par la relation

$$P_{\mu,m,m} = \frac{1}{4},$$

dont on déduit

$$m = 0,8062\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}.$$

Le second écart probable est proportionnel à la racine carrée de la fonction d'instabilité; il est égal au premier écart probable multiplié par 1,7, ...

On comprend la différence entre les deux écarts probables : le

premier a des chances égales d'être ou de ne pas être dépassé à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, tandis que le second a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassé pendant les μ parties.

Lorsque le jeu est uniforme, le second écart probable est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties; il a pour valeur $0{,}8062\sqrt{\mu\varphi_1}$.

387. **Seconds écarts isoprobables.** — Considérons un écart maximum m, tel que la probabilité pour que cet écart ne soit pas dépassé soit égale à un nombre donné u. On doit avoir

$$\int_0^m \frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\left(e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}} - 3e^{-\frac{(3m)^2}{\varphi(\mu)}} + 5e^{-\frac{(5m)^2}{\varphi(\mu)}} - \ldots\right) dm = u.$$

En posant $\frac{m^2}{\varphi(\mu)} = \lambda^2$, cette égalité devient

$$\int_0^{\frac{m}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} \frac{4}{\sqrt{\pi}}(e^{-\lambda^2} - 3e^{-9\lambda^2} + 5e^{-25\lambda^2} - \ldots)\,d\lambda = u.$$

u étant constant, $\frac{m}{\sqrt{\varphi(\mu)}}$ l'est également et m est proportionnel à $\sqrt{\varphi(\mu)}$. Donc

Les seconds écarts isoprobables sont proportionnels à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

388. **Écarts principaux.** — Lorsque μ parties doivent être jouées à un jeu équitable par deux joueurs possédant une fortune infinie, six écarts, parmi l'infinité des écarts qui peuvent se produire, sont particulièrement intéressants.

L'écart probable $[0{,}4769\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}]$ est celui qui a égale probabilité d'être ou de ne pas être finalement dépassé.

L'écart moyen $[0{,}5642\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}]$ ou valeur moyenne de l'écart final considéré en valeur absolue.

L'écart $0{,}642\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}$ est celui qui a la plus grande probabilité d'être l'écart maximum dans le cours des μ parties.

L'écart quadratique $0,7071\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}$ correspond au point d'inflexion de la courbe des probabilités finales.

Le second écart probable $\left[0,8062\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}\right]$ est celui qui a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassé dans le cours des μ parties.

Le second écart moyen $\left[0,8862\ldots\sqrt{\varphi(\mu)}\right]$ est la valeur moyenne du plus grand écart qui se produit dans le cours des μ parties.

389. **Durée probable.** — Dans les problèmes que nous venons de resoudre, le nombre des parties était donné ; nous allons maintenant etudier les problèmes inverses relatifs à la durée du jeu, en supposant les fortunes connues.

Le nombre μ qui correspond à la partie donnant la plus grande probabilité pour la ruine du joueur A est obtenu par la formule

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(P_{\mu,m,n}) = 0.$$

Le même nombre relatif au joueur B s'obtiendrait par la résolution de l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(P_{\mu,n,m}) = 0.$$

Le nombre de parties le plus probable pour la terminaison du jeu serait

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(P_{\mu,m,n} + P_{\mu,n,m}) = 0.$$

390. Le jeu étant supposé uniforme a pour *durée moyenne* (n° 401)

$$\frac{2mn}{\varphi_1}.$$

La *durée probable* du jeu, autrement dit le nombre probable des parties jouées, est donné par l'équation

$$P_{\mu,m,n} + P_{\mu,n,m} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, si $n = m$, la durée probable du jeu est $\mu = \frac{1,5136}{\varphi_1}n^2$;

elle est plus petite que la durée moyenne, égale à $\frac{2m^2}{\varphi_1}$, et elle est environ trois fois plus faible qu'elle ne le serait si l'un des joueurs avait une fortune infinie (nº 330), l'autre possédant toujours la fortune m.

391. **Cas général de l'uniformité.** — *Le joueur* A *possédant la somme m et le joueur* B *la somme n, quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par la ruine du joueur* A?

Nous ne supposerons plus que le jeu est équitable, mais nous supposerons qu'il est uniforme.

Si le joueur B possédait une fortune infinie, la probabilité de ruine du joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait (nº 343)

$$\Pi_{\mu,m,\infty} = \frac{m e^{-\frac{(\mu\psi_1+m)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}\,d\mu.$$

Lorsque le joueur B possède la somme n, *la probabilité cherchée a pour valeur*

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} &- e^{\frac{4n\psi_1}{\varphi_1}}\Pi_{\mu,m+2n,\infty}\\ &- e^{\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}\Pi_{\mu,3m+2n,\infty}\\ &- e^{\frac{(4m+8n)\psi_1}{\varphi_1}}\Pi_{\mu,3m+4n,\infty}\\ &+ e^{\frac{(8m+8n)\psi_1}{\varphi_1}}\Pi_{\mu,5m+4n,\infty}\\ &- e^{\frac{(8m+12n)\psi_1}{\varphi_1}}\Pi_{\mu,5m+6n,\infty}+\ldots\end{aligned}$$

392. En effet, la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ est égale à la probabilité $\Pi_{\mu,m,\infty}$ diminuée de la probabilité relative aux cas où le joueur B est ruiné avant la fin des μ parties.

Le joueur B peut être ruiné à la partie d'ordre μ_1, $(\mu_1 < \mu)$; cette éventualité, d'après le principe de la probabilité composée, diminue $\Pi_{\mu,m,\infty}$ de la quantité

$$\Omega_{\mu_1,n,m}\Pi_{\mu-\mu_1,n+m,\infty},$$

car, si le joueur B ruiné à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie pouvait continuer à jouer, la

probabilité pour qu'il ruinât le joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait $\Pi_{\mu-\mu_1, m+n, \infty}$.

La ruine du joueur B pouvant avoir lieu depuis $\mu_1 = 0$ jusqu'à $\mu_1 = \mu$, la possibilité de la ruine antérieure du joueur B diminue la probabilité $\Pi_{\mu, m, \infty}$ de la quantité

$$\int_0^{\mu} \Omega_{\mu_1, n, m} \times \Pi_{\mu-\mu_1, m+n, \infty}\, d\mu_1.$$

On doit donc avoir

$$\Pi_{\mu, m, n} = \Pi_{\mu, m, \infty} - \int_0^{\mu} \Omega_{\mu_1, n, m}\, \Pi_{\mu-\mu_1, m+n, \infty}\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

393. Il est facile de voir qu'elle est vérifiée identiquement en attribuant aux diverses quantités Π les valeurs indiquées. La probabilité $\Omega_{\mu, n, m}$ s'obtient, en remplaçant, dans l'expression de $\Pi_{\mu, m, n}$, m par n, n par m et ψ_1 par $-\psi_1$. L'intégrale de l'équation conditionnelle se décompose en une somme d'intégrales de la forme

$$\int_0^{\mu} \frac{z_1 e^{-\frac{[(\mu-\mu_1)\psi_1 + z_1]^2}{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}(\mu-\mu_1)\sqrt{(\mu-\mu_1)\varphi_1}}\, \frac{z_2 e^{-\frac{(\mu_1\psi_1 + z_2)^2}{\mu_1\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\mu_1\sqrt{\mu_1\varphi_1}}\, d\mu_1,$$

dont la valeur

$$\frac{(z_1 + z_2) e^{-\frac{(\mu_1\psi_1 + z_1 + z_2)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}$$

a été précédemment déterminée (nº 345). L'identification des deux membres de l'équation ne présente aucune difficulté; nous ne croyons pas utile d'en écrire les formules, qui sont assez compliquées.

L'expression que nous avons donnée de la probabilité $\Pi_{\mu, m, n}$ de ruine du joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire de la probabilité élémentaire du troisième genre, est exacte.

394. On peut aussi la démontrer en suivant une autre méthode, en modifiant quelque peu le raisonnement employé dans le cas de la symétrie (nº 376).

Remarquons d'abord que des égalités

$$\Pi_{\mu,x,\infty} = \frac{x e^{-\frac{(x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}\,d\mu, \qquad \Omega_{\mu,x,\infty} = \frac{x e^{-\frac{(x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\mu\sqrt{\mu\varphi_1}}\,d\mu$$

on déduit

(1) $$\Omega_{\mu,x,\infty} = e^{\frac{4\psi_1 x}{\varphi_1}}\,\Pi_{\mu,x,\infty}.$$

En première approximation, on peut poser

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty}.$$

Cette formule donne pour $\Pi_{\mu,m,n}$ une valeur trop forte; nous devons retrancher du second membre les probabilités relatives aux cas où le joueur B, d'abord ruiné, aurait ensuite ruiné le joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'il avait pu continuer à jouer.

Si le joueur B, lorsqu'il est ruiné, pouvait continuer à jouer, la probabilité pour qu'il ruine le joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire pour qu'il gagne la somme $n+m$ précisément à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, serait, d'après la formule (1), égale au produit par

$$e^{-\frac{4\psi_1(n+m)}{\varphi_1}},$$

de la probabilité pour qu'il perde la somme $n+m$ précisément à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Dans ce dernier cas, sa perte totale serait $2n+m$; nous devons donc poser en seconde approximation

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - e^{-\frac{4\psi_1(n+m)}{\varphi_1}}\,\Omega_{\mu,2n+m,\infty}.$$

Si l'on veut exprimer $\Pi_{\mu,m,n}$ en fonction des seules probabilités Π, il suffit de remplacer Ω par sa valeur (1). On obtient alors

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - e^{\frac{4n\psi_1}{\varphi_1}}\,\Pi_{\mu,m+2n,\infty}.$$

Les termes suivants du développement de $\Pi_{\mu,m,n}$ s'obtiendraient également en suivant la même méthode que dans le cas où il y a symétrie et en remplaçant constamment la raison de symétrie par la raison qu'exprime la formule (1).

395. **Probabilité totale.** — *Le joueur A possédant la somme m et le joueur B la somme n, quelle est la probabilité pour que le jeu se termine avant μ parties par la ruine du joueur A?*

La probabilité cherchée dite *probabilité du troisième genre* $P_{\mu,m,n}$ est la somme des probabilités $\Pi_{\mu,m,n}$ de zéro à μ; on a donc

$$
\begin{aligned}
P_{\mu,m,n} = \int_0^\mu \Pi_{\mu,m,n}\, d\mu &= \int_0^\mu \Pi_{\mu,m,\infty}\, d\mu \\
&- e^{\frac{4n\psi_1}{\varphi_1}} \int_0^\mu \Pi_{\mu,m+2n,\infty}\, d\mu + e^{\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}} \int_0^\mu \Pi_{\mu,3m+2n,\infty}\, d\mu \\
&- e^{\frac{(4m+8n)\psi_1}{\varphi_1}} \int_0^\mu \Pi_{\mu,3m+4n,\infty}\, d\mu + \ldots
\end{aligned}
$$

La probabilité cherchée est donc

$$
\begin{aligned}
P_{\mu,m,n} = P_{\mu,m,\infty} &- e^{\frac{4n\psi_1}{\varphi_1}} P_{\mu,m+2n,\infty} \\
&+ e^{\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}} P_{\mu,3m+2n,\infty} - e^{\frac{(4m+8n)\psi_1}{\varphi_1}} P_{\mu,3m+4n,\infty} \\
&+ e^{\frac{(8m+8n)\psi_1}{\varphi_1}} P_{\mu,5m+4n,\infty} - e^{\frac{(8m+12n)\psi_1}{\varphi_1}} P_{\mu,5m+6n,\infty} + \ldots
\end{aligned}
$$

396. Les quantités $P_{\mu,z,\infty}$ se calculent par la formule connue (n° 346)

$$
P_{\mu,z,\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{4z\psi_1}{\varphi_1}} \int_{\frac{z-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda,
$$

dont la valeur numérique s'obtient immédiatement par les tables de la fonction

$$
\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2}\, dy.
$$

397. **Cas où aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu.** — *Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, quelle est la probabilité de ruine du joueur A?*

Supposons que le jeu avantage le joueur A, c'est-à-dire que ψ_1 soit positif. La quantité cherchée $P_{\infty,m,n}$ s'obtiendra en supposant μ infini

dans le développement en série précédent, et, comme

$$P_{\infty,x,\infty} = e^{-\frac{4x\psi_1}{\varphi_1}},$$

le développement est

$$P_{\infty,m,n} = e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}} - e^{-\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}} + e^{-\frac{(8m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}$$
$$- e^{-\frac{(8m+8n)\psi_1}{\varphi_1}} + e^{-\frac{(12m+8n)\psi_1}{\varphi_1}} - \ldots.$$

Les termes de rang impair forment une progression géométrique de raison

$$e^{-\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}},$$

dont la somme est

$$\frac{e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}}{1 - e^{-\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

Les termes de rang pair forment une progression de même raison dont la somme est

$$\frac{e^{-\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}}{1 - e^{-\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

La probabilité de ruine est donc

$$P_{\infty,m,n} = \frac{e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\left(1 - e^{-\frac{4n\psi_1}{\varphi_1}}\right)}{1 - e^{-\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

La probabilité de ruine du joueur B est

$$Q_{\infty,n,m} = 1 - P_{\infty,m,n} = \frac{1 - e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}}{1 - e^{-\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

Si ψ_1 est négatif, la probabilité de ruine du joueur A est

$$\frac{1 - e^{\frac{4n\psi_1}{\varphi_1}}}{1 - e^{\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

398. On peut obtenir ces formules par un procédé plus simple :

Si le joueur B avait une fortune infinie, la probabilité de ruine du joueur A supposé avantagé par les conditions du jeu ($\psi_1 > 0$) serait (n° 349)

$$e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}.$$

Pour obtenir la probabilité $P_{\infty,m,n}$ de ruine du joueur A quand le joueur B possède la somme n, on doit, de cette expression, retrancher les probabilités correspondant aux cas où le joueur B, d'abord ruiné, aurait ensuite ruiné le joueur A si le jeu avait pu se continuer, c'est-à-dire retrancher

$$(1 - P_{\infty,m,n})e^{-\frac{4(m+n)\psi_1}{\varphi_1}}.$$

En effet, aucune limite n'étant assignée pour la durée du jeu, la probabilité pour que B soit ruiné avant A est la probabilité totale de ruine de B, c'est-à-dire $(1 - P_{\infty,m,n})$, et, d'autre part, la probabilité de ruine du joueur A quand il possède la somme $m + n$ est bien

$$e^{-\frac{4(m+n)\psi_1}{\varphi_1}}.$$

On a donc

$$P_{\infty,m,n} = e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}} - (1 - P_{\infty,m,n})e^{-\frac{4(m+n)\psi_1}{\varphi_1}},$$

c'est-à-dire

$$P_{\infty,m,n} = \frac{e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\left(1 - e^{-\frac{4n\psi_1}{\varphi_1}}\right)}{1 - e^{-\frac{(4m+4n)\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

399. Si le jeu est équitable $\psi_1 = 0$, et les formules deviennent indéterminées; en leur appliquant la règle connue, on obtient

$$P_{\infty,m,n} = \frac{n}{m+n}, \qquad P_{\infty,n,m} = \frac{m}{m+n}.$$

Ce résultat se démontre directement d'une manière fort simple (n° 13).

400. **Durée moyenne.** — Supposons d'abord que le jeu soit désavantageux pour le joueur A, ($\psi_1 < 0$).

Si le joueur B avait une fortune infinie, la durée moyenne du jeu serait (n° 350)

$$-\frac{m}{\psi_1}.$$

La possibilité de la ruine du joueur B diminue cette durée moyenne d'une quantité que nous allons déterminer.

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné est $Q_{x,n,m}$, et, au moment où il est ruiné, s'il pouvait continuer à jouer, possédant une fortune infinie, la durée moyenne du jeu serait

$$-\frac{(m+n)}{\psi_1}.$$

La possibilité de la ruine du joueur B diminue donc la durée moyenne de la quantité

$$-Q_{x,n,m}\frac{m+n}{\psi_1}.$$

La durée moyenne a donc pour expression

$$-\frac{m}{\psi_1}+Q_{x,n,m}\frac{(m+n)}{\psi_1}$$

ou

$$\frac{m(1-Q_{x,n,m})-nQ_{x,n,m}}{-\psi_1};$$

$-\psi_1$ est l'espérance du joueur B pour une partie, $m(1-Q_{x,n,m})$ est son espérance positive pour l'ensemble du jeu, $-nQ_{x,n,m}$ est son espérance négative pour l'ensemble du jeu, et le numérateur de la fraction est son espérance totale.

La durée moyenne du jeu est donc égale au rapport de l'espérance totale de l'un des joueurs à l'espérance du même joueur pour une partie.

401. Si le jeu est équitable, c'est-à-dire si $\psi_1=0$, l'expression de la durée moyenne prend la forme $\frac{0}{0}$; en lui appliquant deux fois de suite la règle connue, on trouve pour valeur moyenne

$$\frac{2mn}{\varphi_1}.$$

La durée moyenne est proportionnelle au produit des fortunes des joueurs et inversement proportionnelle à la fonction d'instabilité.

402. **Application à la théorie des épreuves répétées.** — Les formules générales des probabilités du second et du troisième genre sont applicables au cas particulier plus simple des épreuves répétées, c'est-à-dire des épreuves qui ne sont pas explicitement les parties successives d'un jeu.

Lorsque nous avons étudié les probabilités du premier genre, nous avons déduit de notre théorie générale des formules approchées relatives à la théorie des épreuves répétées ou théorie des écarts (nos 260 et 280).

Nous pourrions de même maintenant résoudre d'autres problèmes relatifs à ces épreuves en les assimilant aux questions de probabilités du second et du troisième genre. Nous traiterons à titre d'exemple le problème suivant :

Soient p la probabilité d'un événement H à chaque épreuve, $q = 1 - p$ la probabilité de l'événement contraire K. Quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves au maximum, le nombre des arrivées de l'événement K surpasse de m le nombre des arrivées de l'événement H; le nombre des arrivées de l'événement H n'ayant pas précédemment dépassé de n le nombre des arrivées de l'événement K?

Supposons qu'un joueur A ait, à chaque partie, probabilité p pour gagner un franc et probabilité $q = 1 - p$ pour perdre un franc. Le problème proposé revient à chercher la probabilité pour que le joueur A soit ruiné en jouant μ parties au maximum quand il possède m francs, son adversaire B possédant n francs.

La formule du n° 395 donne la solution approchée du problème lorsque m, n et μ sont de grands nombres ; il suffit d'y remplacer ψ_1 par $p - q$ et φ_1 par $8pq$.

Les autres questions que nous avons traitées dans ces deux derniers Chapitres permettraient de résoudre des problèmes analogues.

403. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ les probabilités d'un événement à la première, la seconde, ..., la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve, et soient $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2, \ldots, q_\mu = 1 - p_\mu$ les probabilités de l'événement contraire.

Si, en μ épreuves, le premier événement s'est produit $\Sigma p + x$ fois, on dit que l'écart est x (n° 282).

La probabilité d'un écart x en μ épreuves est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dx.$$

Si un joueur perd une somme égale à l'écart, son jeu est équitable et est caractérisé par la fonction d'instabilité $2\Sigma pq$.

Il en résulte que *la théorie des écarts dans les épreuves répétées n'est qu'un cas particulier de la théorie des jeux équitables.*

La probabilité pour que, dans le cours des μ épreuves, l'écart $\pm m$ soit dépassé a pour valeur $2P_{\mu,m,m}$; $P_{\mu,m,m}$ étant donné par la formule du n° 380, où $\varphi(\mu)$ est remplacé par $2\Sigma pq$.

Le second écart moyen a pour valeur

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{2\Sigma pq};$$

il est égal au premier écart moyen (n° 285) multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

Le second écart probable a pour valeur

$$0,8062\sqrt{2\Sigma pq};$$

il est égal au premier écart probable (n° 285) multiplié par 1,7.

On comprend bien la différence entre les deux écarts probables : le premier a des chances égales d'être ou de ne pas être dépassé à la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve, tandis que le second a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassé dans le cours des μ épreuves.

404. **Les écarts principaux.** — Lorsque μ épreuves doivent être tentées, six écarts parmi l'infinité des écarts qui peuvent se produire sont particulièrement intéressants :

L'écart probable $(0,4769\ldots\sqrt{2\Sigma pq})$ est celui qui a égale probabilité d'être ou de ne pas être finalement dépassé.

L'écart moyen $(0,5642\ldots\sqrt{2\Sigma pq})$ ou valeur moyenne de l'écart final considéré en valeur absolue.

L'écart $0,642\ldots\sqrt{2\Sigma pq}$ est celui qui a la plus grande probabilité d'être l'écart maximum dans le cours des μ épreuves.

L'écart quadratique $0,7071\ldots\sqrt{2\Sigma pq}$ correspond au point d'inflexion de la courbe des probabilités finales.

Le second écart probable $(0,8062\ldots\sqrt{2\Sigma pq})$ est celui qui a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassé dans le cours des μ épreuves.

Le second écart moyen $(0,8862\ldots\sqrt{2\Sigma pq})$ est la valeur moyenne du plus grand écart qui se produit dans le cours des μ épreuves.

405. **Cas général de non-uniformité.** — Il semble difficile de résoudre les problèmes que nous venons de traiter quand le jeu n'est pas uniforme, sauf dans le cas où l'on suppose comme au nº 356 que la fonction d'instabilité $\varphi(\mu)$ et l'espérance totale $\psi(\mu)$ sont constamment proportionnelles, de sorte que $\psi(\mu) = k\varphi(\mu)$.

Rappelons que le jeu considéré est plus général qu'un jeu équitable non uniforme (nº 380), puisqu'on obtiendrait ce dernier jeu en supposant que k est nul.

Il est également plus général qu'un jeu quelconque uniforme, puisqu'on obtiendrait ce dernier jeu en supposant que $\varphi(\mu) = \mu\varphi_1$.

Le jeu considéré est donc plus général que ceux qui ont été étudiés dans ce Chapitre.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Le joueur A *possédant la somme* m *et le joueur* B *la somme* n, *quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie par la ruine du joueur* A?

Si le joueur B possédait une fortune infinie, la probabilité de ruine du joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait (nº 358)

$$\text{II}_{\mu,m,x} = \frac{m\,\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\,d\mu.$$

Lorsque le joueur B possède la somme n, *la probabilité cherchée a*

pour valeur

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - e^{4nk}\Pi_{\mu,m+2n,\infty} + e^{(4m+4n)k}\Pi_{\mu,3m+2n,\infty} - e^{(4m+8n)k}\Pi_{\mu,3m+4n,\infty}$$
$$+ e^{(8m+8n)k}\Pi_{\mu,5m+4n,\infty} - e^{(8m+12n)k}\Pi_{\mu,5m+6n,\infty} + \ldots.$$

406. Nous allons employer une démonstration analogue à celle dont nous avons fait usage dans le cas de l'uniformité (n° 392). La probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ est égale à la probabilité $\Pi_{\mu,m,\infty}$ diminuée de la probabilité relative aux cas où le joueur B est ruiné avant la fin des μ parties.

Le joueur B peut être ruiné à la partie d'ordre μ_1, ($\mu_1 < \mu$); cette éventualité, d'après le principe de la probabilité composée, diminue $\Pi_{\mu,m,\infty}$ de la quantité

$$\Omega_{\mu_1,n,m}\Pi_{\mu_1,\mu,n+m,\infty},$$

car, si le joueur B ruiné à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie pouvait continuer à jouer, la probabilité pour qu'il ruinât le joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait $\Pi_{\mu_1,\mu,n+m,\infty}$.

La ruine du joueur B pouvant avoir lieu depuis $\mu_1 = 0$ jusqu'à $\mu_1 = \mu$, la possibilité de la ruine antérieure du joueur B diminue la probabilité $\Pi_{\mu,m,\infty}$ de la quantité

$$\int_0^{\mu} \Omega_{\mu_1,n,m}\Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}\,d\mu_1.$$

On doit donc avoir

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \int_0^{\mu} \Omega_{\mu_1,n,m}\Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}\,d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

407. Il est facile de voir qu'elle est vérifiée identiquement en attribuant aux diverses quantités Π les valeurs indiquées. La probabilité $\Omega_{\mu,n,m}$ s'obtient en remplaçant, dans l'expression de $\Pi_{\mu,m,n}$, m par n, n par m et $k\varphi(\mu)$ par $-k\varphi(\mu)$.

La probabilité $\Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}$ est

$$\Pi_{\mu_1,\mu,n+m,\infty} = \frac{(m+n)\,\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{[k(\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1))+(m+n)]^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}$$

(la valeur de la fonction φ dans un intervalle μ_1, μ est $\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)$, puisque la fonction φ se forme par addition (§ 228).

L'intégrale de l'équation conditionnelle est une somme d'intégrales de la forme

$$\int_0^{\mu} \frac{z_1 \varphi'(\mu) e^{-\frac{[\lambda[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]+z_1]^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}} \frac{z_2 \varphi'(\mu_1) e^{-\frac{[\lambda\varphi(\mu_1)+z_2]^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}} d\mu_1$$
$$= \frac{(z_1+z_2)\varphi'(\mu) e^{-\frac{[\lambda\varphi(\mu)+z_1+z_2]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}.$$

Pour démontrer cette dernière égalité, il faut remarquer qu'on peut l'écrire

$$e^{-\lambda^2\varphi(\mu)-2\lambda(z_1+z_2)} \int_0^{\mu} \frac{z_1 \varphi'(\mu) e^{-\frac{z_1^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}} \frac{z_2 \varphi'(\mu_1) e^{-\frac{z_2^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}} d\mu_1$$
$$= e^{-\lambda^2\varphi(\mu)-2\lambda(z_1+z_2)} \frac{(z_1+z_2)\varphi'(\mu) e^{-\frac{(z_1+z_2)^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}.$$

Cette égalité a été démontrée (n° 341). L'identification des deux membres de l'équation conditionnelle ne présente aucune difficulté; nous ne croyons pas utile d'en écrire les formules, qui sont assez compliquées.

L'expression que nous avons donnée de la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ de la ruine du joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire de la probabilité élémentaire du troisième genre, est exacte.

On doit remarquer que cette probabilité est proportionnelle à $\varphi'(\mu)d\mu$, c'est-à-dire à l'instabilité de la dernière partie et indépendante de l'ordre des parties antérieures.

On pourrait, sans qu'il en résulte aucune nouvelle difficulté, employer pour la démonstration de notre formule le raisonnement qui a été exposé au paragraphe 394.

408. **Probabilité totale.** — *Le joueur* A *possédant la somme* m *et le joueur* B *la somme* n, *quelle est la probabilité pour que le jeu se termine avant* μ *parties par la ruine du joueur* A.

La probabilité cherchée dite *probabilité du troisième genre* $P_{\mu,m,n}$

est la somme des probabilités $\Pi_{\mu,m,n}$ de zéro à μ; on a donc

$$P_{\mu,m,n} = \int_0^\mu \Pi_{\mu,m,n}\,d\mu = \int_0^\mu \Pi_{\mu,m,\infty}\,d\mu$$
$$- e^{4nk}\int_0^\mu \Pi_{\mu,m+2n,\infty}\,d\mu + e^{(4m+4n)k}\int_0^\mu \Pi_{\mu,3m+2n,\infty}\,d\mu - \ldots.$$

La probabilité cherchée est donc

$$P_{\mu,m,n} = P_{\mu,m,\infty} - e^{4nk}P_{\mu,m+2n,\infty}$$
$$+ e^{(4m+4n)k}P_{\mu,3m+2n,\infty} - e^{(4m+8n)k}P_{\mu,3m+4n,\infty}$$
$$+ e^{(8m+8n)k}P_{\mu,5m+4n,\infty} - e^{(8m+12n)k}P_{\mu,5m+6n,\infty} + \ldots.$$

409. Les quantités $P_{\mu,z,\infty}$ se calculent par la formule connue (§ 359)

$$P_{\mu,z,\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z+k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{e^{-4zk}}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z-k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

dont la valeur numérique s'obtient immédiatement par les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-y^2}\,dy.$$

410. Cas où aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu. — *Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, quelle est la probabilité de ruine du joueur A?*

Supposons d'abord que, μ augmentant indéfiniment, $\varphi(\mu)$ tende vers une limite fixe $\varphi(\infty)$; alors la probabilité totale de ruine du joueur A est

$$P_{\infty,m,n} = P_{\infty,m,\infty} - e^{4nk}P_{\infty,m+2n,\infty}$$
$$+ e^{(4m+4n)k}P_{\infty,3m+2n,\infty} - e^{(4m+8n)k}P_{\infty,3m+4n,\infty} + \ldots,$$

les quantités telles que $P_{\infty,z,\infty}$ ayant pour valeur

$$P_{\infty,z,\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z+k\varphi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4zk}\int_{\frac{z-k\varphi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

La probabilité pour que le jeu prenne fin est

$$P_{\infty,m,n} + Q_{\infty,n,m},$$

et la probabilité pour qu'il dure indéfiniment a pour expression

$$1 - P_{x,m,n} - Q_{x,n,m}.$$

411. Supposons maintenant que $\varphi(\mu)$ croisse indéfiniment avec μ, et que le jeu soit avantageux pour le joueur A, $(k > 0)$; on a, dans ces conditions,

$$P_{x,z,\infty} = e^{-4kz},$$

et par suite

$$P_{x,m,n} = e^{-4mk} - e^{-(4m+4n)k} + e^{-(8m+4n)k}$$
$$- e^{-(8m+8n)k} + e^{-(12m+8n)k} - \ldots.$$

Les termes de rang impair forment une progression géométrique de même que les termes de rang pair.

La probabilité de ruine est

$$P_{\infty,m,n} = \frac{e^{-4mk}(1 - e^{-4nk})}{1 - e^{-(4m+4n)k}}.$$

La probabilité de ruine du joueur B est de même

$$Q_{\infty,n,m} = \frac{1 - e^{4mk}}{1 - e^{-(4m+4n)k}}.$$

Ces probabilités ne dépendent pas de la fonction $\varphi(\mu)$.

Si k est négatif, la probabilité de ruine du joueur A est

$$\frac{1 - e^{4nk}}{1 - e^{(4m+4n)k}}.$$

On pourrait aussi obtenir ces formules par un raisonnement analogue à celui du n° 398.

412. Si le jeu est équitable, c'est-à-dire si $k = 0$, les dernières formules deviennent indéterminées; en leur appliquant la règle connue on obtient

$$P_{\infty,m,n} = \frac{n}{m+n}, \qquad P_{\infty,n,m} = \frac{m}{m+n}.$$

Si $\varphi(\mu)$ lorsque μ augmente indéfiniment tend vers une valeur fixe $\varphi(\infty)$, la probabilité de ruine du joueur A est

$$P_{\infty,m,n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+2n}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{3m+2n}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda - \ldots.$$

413. **Distribution des probabilités.** — Il nous reste à étudier la distribution des probabilités et l'espérance mathématique. La seconde question se déduit de la première et celle-ci peut être traitée comme dans le cas des probabilités du second genre. Cherchons par exemple la probabilité pour que le joueur A perde la somme x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Si les deux joueurs avaient une fortune infinie, la probabilité serait $\varpi_{\mu,x}$: il faut retrancher de cette quantité les probabilités qui correspondent aux cas où les joueurs seraient ruinés avant que μ parties soient jouées.

Le joueur A peut être ruiné à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie : cette éventualité a pour probabilité $\Pi_{\mu_1,m,n}$ et elle diminue la probabilité $\varpi_{\mu,x}$ de la quantité $\Pi_{\mu_1,m,n} \times \varpi_{\mu-\mu_1,-(m-x)}$ (on suppose l'uniformité). La ruine du joueur A pouvant se produire à toutes les parties de zéro à μ, la possibilité de la ruine de ce joueur diminue la probabilité $\varpi_{\mu,x}$ de la quantité

$$\int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1,m,n}\,\varpi_{\mu-\mu_1,-(m-x)}\,d\mu_1.$$

La possibilité de la ruine du joueur B diminue de même la probabilité $\varpi_{\mu,x}$ de la quantité

$$\int_0^{\mu} \Omega_{\mu_1,n,m}\,\varpi_{\mu-\mu_1,(n+x)}\,d\mu_1.$$

La probabilité pour que le joueur A perde la somme x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est donc

$$\varpi_{\mu,x} - \int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1,m,n}\,\varpi_{\mu-\mu_1,-(m-x)}\,d\mu_1 - \int_0^{\mu} \Omega_{\mu_1,n,m}\,\varpi_{\mu-\mu_1,(n+x)}\,d\mu_1,$$

c'est-à-dire, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} \Bigg[& e^{-\frac{(x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} - e^{\frac{4\psi_1(m-x)}{\varphi_1}}\, e^{-\frac{(2m-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} \\
& + e^{\frac{4\psi_1(m+n-x)}{\varphi_1}}\, e^{-\frac{(2m+2n-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} - e^{\frac{4\psi_1(2m+n-x)}{\varphi_1}}\, e^{-\frac{(4m+2n-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + \ldots \\
& - e^{-\frac{4\psi_1(n+x)}{\varphi_1}}\, e^{-\frac{(2n+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + e^{-\frac{4\psi_1(n+m+x)}{\mu\varphi_1}}\, e^{-\frac{(2n+2m+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} \\
& - e^{-\frac{4\psi_1(2n+m+x)}{\varphi_1}}\, e^{-\frac{(4n+2m+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + \ldots \Bigg].
\end{aligned}$$

On peut obtenir le même résultat en suivant un raisonnement analogue à celui qui a été employé au paragraphe 394 : cette méthode ne diffère en réalité de la précédente que par la forme ; elle se réduit à de simples considérations de symétrie quand le jeu est équitable.

Pour obtenir la probabilité dans le cas où le jeu n'est pas uniforme et où il est tel que $\psi(\mu) = k\varphi(\mu)$ (n° 405), il suffit, dans la formule, de remplacer ψ_1 par $k\varphi_1$ et $\mu\varphi_1$ par $\varphi(\mu)$.

Avant de passer à d'autres questions une remarque n'est peut-être pas inutile. Nous avons résolu d'une façon complète tous les problèmes de la théorie générale du jeu relatifs au cas de deux joueurs en admettant que le jeu soit uniforme ou qu'il soit équitable et quelconque. La théorie de ces jeux, qui constitue une des questions les plus importantes au point de vue mathématique du calcul des probabilités, peut donc être considérée comme entièrement connue et comme arrivée à un degré de perfection qui semble définitif.

CHAPITRE XII.

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA SPÉCULATION.

414. La théorie de la spéculation a été le point de départ de la théorie des probabilités continues; les conceptions nouvelles qu'elle a fait naître, sa simplicité et sa clarté extrêmes ont été la cause initiale de nombreux progrès et justifient l'étendue que nous donnerons à son étude. La conception de la théorie de la spéculation a eu pour conséquence la conception des probabilités continues, parce que les problèmes que se posait cette théorie ne pouvaient admettre que des solutions continues, à l'inverse des problèmes résolus dans le passé qui ne pouvaient admettre que des solutions exactes discontinues.

La théorie de la spéculation a donc introduit dans le calcul des probabilités une nouvelle notion, mais là ne se borne pas son intérêt; au point de vue pratique, son utilité ne peut être mise en doute, puisque les résultats que fournit l'examen des cotes sont en parfait accord avec ceux que fournit le calcul.

Cette concordance entre la théorie et l'observation est également intéressante au point de vue philosophique; elle prouve en effet que le marché de la rente obéit à la loi du hasard.

Ce résultat était du reste à prévoir; un tel marché soumis constamment à une infinité d'influences variables et qui agissent dans divers sens doit finalement se comporter comme si aucune cause n'était en jeu et comme si le hasard agissait seul.

Les résultats de la théorie ne pourraient être mis en défaut que si une cause agissait constamment dans le même sens; en fait, la diversité des causes permet leur élimination; l'incohérence même du marché est sa méthode, et c'est parce qu'il n'obéit à aucune loi qu'il suit fatalement la loi du hasard.

415. Dans la théorie de la spéculation, les probabilités sont constamment variables et d'une manière continue; c'est pourquoi cette théorie donna l'idée d'assimiler le phénomène de la transformation des probabilités à certains phénomènes physiques et conduisit à la loi du rayonnement de la probabilité. Cette loi, qui permet de résoudre par simple analogie diverses questions de physique mathématique, est fort curieuse; elle établit un rapprochement entre deux théories qui semblent ne pouvoir présenter la moindre similitude, et elle prouve que certaines lois physiques peuvent être considérées comme l'expression des lois du hasard.

416. Je n'ai pas cru devoir reproduire dans l'étude qui va suivre toutes les questions traitées dans l'Ouvrage sur la théorie de la spéculation que j'ai publié il y a quelques années; je me place ici au point de vue théorique, et je n'envisage ni la pratique de la spéculation ni la comparaison des chiffres calculés avec ceux qui sont obtenus par l'examen des cotes.

Réduite à sa partie théorique, l'étude de la spéculation présente encore un grand intérêt; elle montre le calcul des probabilités sous un nouveau jour, sous une forme très saisissante et très claire.

417. **Notions générales sur la probabilité.** — Nous supposerons que les variations des cours de la rente, par exemple, soient dues uniquement au hasard, et nous chercherons les lois de ces variations, c'est-à-dire que nous chercherons la probabilité pour que, à l'époque t, le cours diffère d'une quantité donnée du cours coté à l'instant actuel.

Nous prendrons pour zéro le cours actuel; le cours x sera donc un cours relatif désignant l'écart au cours actuel.

La probabilité pour que le cours x soit coté à une époque donnée, ou, plus exactement, la probabilité pour que le cours soit à cette époque compris entre x et $x+dx$ est une fonction de x que l'on peut représenter par l'ordonnée d'une courbe dont les abscisses sont les différents cours.

Nous prendrons pour origine le cours actuel; la courbe de probabilité s'étendra de part et d'autre de $-\infty$ à $+\infty$, et elle sera nécessaire-

ment asymptote à l'axe des x. Son aire totale, qui représente la somme des probabilités de tous les cours, aura pour valeur l'unité.

Le premier problème de notre étude consistera à déterminer la probabilité pour que le cours x soit coté à l'époque t.

418. **Principe de l'indépendance.** — Les variations du cours qui peuvent se produire à un instant quelconque sont indépendantes des variations antérieures et du cours coté à cet instant.

Il faut bien comprendre ce que signifie ce principe : il est évident qu'en réalité l'indépendance n'existe pas, mais, par suite de l'excessive complexité des causes qui entrent en jeu, tout se passe comme s'il y avait indépendance.

Si le cours est z à l'époque t_1, la probabilité d'un nouvel écart y pendant un nouvel intervalle de temps t_2 est indépendante de z; elle ne dépend que de y, t_1 et t_2.

Le principe des probabilités composées, le principe des probabilités totales et le principe de l'indépendance permettent de déterminer la loi de probabilité, c'est-à-dire de calculer la probabilité pour que le cours soit x à l'époque t.

Désignons par $\varpi_{0.t.x}dx$ la probabilité pour que, à l'époque t, le cours se trouve compris dans l'intervalle $x, x+dx$. (Dans mon Ouvrage sur la *Théorie de la spéculation*, cette probabilité était désignée par $p_{x,t}\,dx$.)

Cherchons la probabilité pour que le cours x soit coté à l'époque $t_1+t_2=t$, le cours z ayant été coté à l'époque t_1.

En vertu du principe de la probabilité composée, la probabilité cherchée est égale au produit de la probabilité pour que le cours z soit coté à l'époque t_1, c'est-à-dire $\varpi_{0.t_1,z}\,dz$ multiplié par la probabilité pour que, le cours z étant coté à l'époque t_1, le cours x soit coté à l'époque $t_1+t_2=t$, c'est-à-dire multiplié par $\varpi_{t_1,t,x-z}\,dx$.

La probabilité cherchée est donc

$$\varpi_{0,t_1,z}\,\varpi_{t_1,t,x-z}\,dz\,dx.$$

Le cours pouvant se trouver à l'époque t_1 dans tous les intervalles dz compris entre $-\infty$ et $+\infty$, la probabilité pour que le cours x soit

coté à l'époque t est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{0,t_1,z}\,\varpi_{t_1,t,x-z}\,dz\,dx.$$

La probabilité de ce cours x à l'époque t a aussi pour expression $\varpi_{0,t,x}dx$; on a donc

$$\varpi_{0,t,x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{0,t_1,z}\,\varpi_{t_1,t,x-z}\,dz\,dx$$

ou

$$\varpi_{0,t,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{0,t_1,z}\,\varpi_{t_1,t,x-z}\,dz;$$

telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction ϖ ; elle doit être vérifiée quels que soient t_1 et t.

Lorsque $t-t_1$ tend vers zéro, la probabilité pour que l'écart y correspondant à cet intervalle soit compris entre $-\alpha$ et $+\beta$ doit tendre vers 1, quelques petites que soient les quantités positives (et fixes) α et β. On doit donc avoir

$$\lim \int_{-\alpha}^{\beta} \varpi_{t_1,t,y}\,dy = 1 \qquad \text{pour } t - t_1 = 0.$$

419. Ces conditions sont identiques à celles du paragraphe 226 et ce résultat est évident ; le spéculateur qui achète ou qui vend au cours zéro réalise à l'époque t un gain ou une perte égaux au cours x ; la probabilité du cours x est donc la probabilité du gain ou de la perte x.

Une analyse identique à celle du paragraphe 226 conduirait à l'expression la plus générale de la probabilité ϖ,

$$\varpi_{0,t,x} = \frac{e^{-\frac{\left[\int_0^t \psi'(t)\,dt + x\right]^2}{\int_0^t \varphi'(t)\,dt}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\int_0^t \varphi'(t)\,dt}}\,dx.$$

$\psi'(t)$ et $\varphi'(t)$ sont des fonctions arbitraires, dont la seconde doit constamment être positive.

Nous écrirons simplement

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{[\psi(t)+x]^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\,dx.$$

et nous considérerons les fonctions φ et ψ comme arbitraires en tenant compte, quand besoin sera, de leur propriété additive.

Par exemple, la fonction φ relative à un intervalle de temps t est la somme des fonctions analogues relatives à tous les éléments de temps qui composent cet intervalle t.

La fonction φ croît donc constamment avec t.

420. **Principe de l'espérance mathématique.** — Nous ne pouvons admettre qu'une opération de spéculation favorise *a priori* celui qui la contracte ; ces sortes d'opérations sont soumises à la loi dite *de l'offre et de la demande*, et une opération qui favoriserait systématiquement l'un des contractants ne trouverait pas de contre-partie.

Une opération ne peut être *a priori* ni avantageuse, ni désavantageuse ; c'est ce qu'on exprime en disant :

L'espérance mathématique de toute opération est nulle.

421. Pour appliquer ce principe, supposons qu'on achète de la rente au cours actuel zéro pour la revendre à l'époque t ; le bénéfice sera exprimé par le cours x à cette époque, et, par suite, l'espérance totale de l'opération est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{-\frac{[\psi(t)+x]^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\,dx = \psi(t).$$

Cette espérance doit être nulle, donc $\psi(t) = 0$; donc

La probabilité du cours x à l'époque t a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\,dx.$$

Le principe de l'espérance mathématique a, comme on voit, pour conséquence la symétrie de la probabilité.

L'expression de la probabilité ne contient qu'une fonction arbitraire $\varphi(t)$ que nous nommerons *fonction d'instabilité*. Nous verrons plus loin par quelles données on peut la déterminer; pour le moment, nous supposerons qu'elle est connue.

Lorsqu'il s'agissait de la théorie générale des probabilités continues (n° 274), nous pouvions supposer que $\varphi(t)$ pouvait tendre vers une limite finie pour t infini. La nature de la question que nous traitons ici ne permet pas de faire cette supposition; dans la théorie de la spéculation, $\varphi(t)$ est infini quand t est infini.

422. Courbe de probabilité. — La fonction

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}$$

peut se représenter par une courbe dont l'ordonnée est maxima à l'origine et qui présente deux points d'inflexion pour

$$x = \frac{\pm\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{2}}.$$

Ces mêmes valeurs de x sont aussi les abscisses des maxima et minima des courbes d'espérance mathématique dont l'équation est $y = \pm\varpi x$.

La probabilité ϖ d'un cours x est une fonction de t qui croît jusqu'à une certaine époque et décroît ensuite; cette fonction est maxima quand le cours x correspond au point d'inflexion de la courbe de probabilité.

423. Espérance mathématique. — Il s'agit de l'espérance mathématique positive d'un spéculateur qui achèterait de la rente au cours actuel pour la revendre à l'époque t.

Cette espérance a pour valeur

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}} dx = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}};$$

elle est proportionnelle à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

Nous désignerons la quantité $\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}}$ par la lettre a, et, dans bien des questions, nous exprimerons les variations de cours en prenant a pour unité.

Dans ces conditions, la probabilité du cours x est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}}}{2\pi a}\,dx.$$

424. **Probabilité dans un intervalle donné.** — Les Tables de la fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-y^2}\,dy$$

qui sont reproduites à la fin du volume permettent de calculer la probabilité dans un intervalle donné.

La probabilité pour que le cours soit compris entre zéro et x a pour expression

$$\int_0^x \frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\,dx,$$

ou, en posant $\frac{x^2}{\varphi(t)} = \lambda^2$,

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(t)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2}\,\Theta\left[\frac{x}{\sqrt{\varphi(t)}}\right].$$

425. La probabilité pour que le cours soit compris dans l'intervalle $-x, +x$ a pour valeur

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(t)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \Theta\left[\frac{x}{\sqrt{\varphi(t)}}\right].$$

Lorsque t tend vers l'infini, cette probabilité tend vers zéro.

La probabilité dans l'intervalle $-x_1, +x_2$ est

$$\frac{1}{2}\,\Theta\left[\frac{x_1}{\sqrt{\varphi(t)}}\right] + \frac{1}{2}\,\Theta\left[\frac{x_2}{\sqrt{\varphi(t)}}\right].$$

Cette expression tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment.

426. *La probabilité*

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(t)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\Theta\left[\frac{x}{\sqrt{\varphi(t)}}\right],$$

pour que le cours soit supérieur à x à l'époque t, croît constamment avec le temps. Si t était infini elle serait égale à $\frac{1}{2}$, résultat évident.

427. Au lieu d'avoir recours aux Tables de la fonction Θ, il est généralement beaucoup plus simple de faire usage de la Table suivante, qui donne directement la probabilité $\mathfrak{P}$ correspondant au cours x exprimé en prenant $a = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}}$ pour unité.

Écart.	Probabilité $\mathfrak{P}$.	Écart.	Probabilité $\mathfrak{P}$.
0,0a	0,500	2,3a	0,179
0,1a	0,484	2,4a	0,169
0,2a	0,469	2,5a	0,159
0,3a	0,453	2,6a	0,150
0,4a	0,437	2,7a	0,141
0,5a	0,422	2,8a	0,132
0,6a	0,404	2,9a	0,124
0,7a	0,390	3,0a	0,116
0,8a	0,374	3,1a	0,108
0,9a	0,360	3,2a	0,101
1,0a	0,345	3,3a	0,094
1,1a	0,331	3,4a	0,087
1,2a	0,316	3,5a	0,080
1,3a	0,302	3,6a	0,075
1,4a	0,289	3,7a	0,070
1,5a	0,275	3,8a	0,065
1,6a	0,262	3,9a	0,060
1,7a	0,249	4a	0,055
1,8a	0,237	4,5a	0,037
1,9a	0,225	5a	0,023
2,0a	0,213	5,5a	0,015
2,1a	0,202	6a	0,009
2,2a	0,190	7a	0,003

428. — Les diverses probabilités s'expriment facilement par la fonction $\mathfrak{P}$; par exemple, la probabilité pour que le cours soit compris dans l'intervalle $-x_1, +x_2$ a pour valeur $1 - \mathfrak{P}_{x_1} - \mathfrak{P}_{x_2}$.

Il ne faut pas oublier que les cours sont exprimés en prenant $a = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}}$ pour unité.

429. **Écart moyen.** — L'*écart moyen* est, par définition, l'espérance mathématique d'un joueur qui devrait recevoir une somme égale à la valeur absolue de l'écart à l'époque t. C'est donc la quantité

$$2\int_0^\infty \varpi x\,dx = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\pi}}.$$

L'écart moyen est proportionnel à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

Si l'on désigne par a la quantité $\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}}$, l'écart moyen a pour valeur $2a$.

La probabilité pour que l'écart moyen soit dépassé dans un seul sens est donc 0,214 d'après la Table du paragraphe 427; la probabilité pour que l'écart moyen soit dépassé dans un sens ou dans l'autre est 0,428.

430. **Écart probable.** — Nous appelons ainsi l'écart $\pm\alpha$ tel que, à l'époque t, le cours ait une chance sur deux d'être compris dans cet intervalle.

La quantité α se détermine par l'équation

$$\mathfrak{P}_\alpha = \frac{1}{4}.$$

On en déduit, d'après la Table du paragraphe 427,

$$\alpha = 1,688\ldots a = 1,688\ldots\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}}.$$

L'écart probable est proportionnel à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

Il est égal à l'écart moyen multiplié par le nombre 0,844....

431. **Écarts isoprobables.** — Plus généralement, considérons l'écart $\pm\beta$ tel que la probabilité, pour que, à l'époque t, le cours soit

compris dans cet intervalle, soit égale à u; nous aurons

$$\int_0^\beta \varpi\,dx = \frac{u}{2}$$

ou

$$\Theta\left[\frac{\beta}{\sqrt{\varphi(t)}}\right] = u.$$

Cet intervalle β, si u est constant, varie proportionnellement à $\sqrt{\varphi(t)}$.

Les écarts croissent proportionnellement à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

C'est à cette propriété que la fonction d'instabilité doit son nom.

$\varphi(t)$ croît constamment avec t et jusqu'à l'infini; les écarts isoprobables croissent donc constamment et jusqu'à l'infini.

132. **Principe de l'uniformité.** — Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur la forme de la fonction $\varphi(t)$; nous pouvons même remarquer que certains résultats sont indépendants de cette fonction; c'est ainsi que le rapport de l'écart probable à l'écart moyen est 0,844, quel que soit $\varphi(t)$. La probabilité pour que l'un de ces écarts soit dépassé est de même indépendante de $\varphi(t)$.

Il est évident que dans la plupart des cas le marché n'a aucune raison pour supposer que la probabilité d'un écart y dans l'intervalle zéro, t_1 est différente de la probabilité de ce même écart dans l'intervalle t_1, $2t_1$ ou $2t_1$, $3t_1$, ... Le marché suppose donc généralement qu'il y a uniformité, c'est-à-dire que l'instabilité est la même pour tous les éléments de temps; en d'autres termes, il suppose que dans la formule

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(t)\,dt.$$

$\varphi'(t)$ a une valeur constante $4\pi k^2$, de sorte qu'on a

$$\varphi(t) = 4\pi k^2 t.$$

Nous avons désigné la constante par $4\pi k^2$, afin que l'espérance mathématique (n° 423)

$$a = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}} = k\sqrt{t},$$

qui est proportionnelle à la racine carrée du temps, se réduise à un coefficient k lorsque $t = 1$.

k est le *coefficient d'instabilité.*

Si l'on suppose l'uniformité, *la probabilité du cours x à l'époque t est*

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}}}{2\pi k\sqrt{t}}\,dx.$$

433. L'expression d'uniformité qui a été employée dans la théorie des jeux pourrait faire naître une idée fausse. Lorsqu'on dit qu'un jeu est uniforme, on suppose généralement qu'il le sera dans la réalité; lorsqu'il s'agit de la spéculation, l'uniformité au contraire ne peut être réelle; le marché à l'époque actuelle $t = 0$ considère les probabilités relatives aux époques futures comme uniformes et caractérisées par le coefficient d'instabilité k; à l'époque Δt il admet une uniformité caractérisée par un autre coefficient k', à l'époque $2\Delta t$ il admet une uniformité caractérisée par un autre coefficient k'', etc.

Comme on calcule les valeurs des probabilités à l'époque $t = 0$, les formules sont les mêmes, que l'uniformité soit supposée ou réelle.

Le marché s'écarte fort peu de la loi de l'uniformité même dans la spéculation sur les marchandises, où cependant, à certaines époques, les cours doivent *a priori* être instables.

Si, ordinairement, nous ne supposons pas l'uniformité, c'est pour conserver à notre étude son maximum de généralité, et cela est surtout intéressant au point de vue théorique.

434. Pour obtenir les formules relatives au cas où l'on admet l'uniformité, il suffit de remplacer dans la théorie qui précède la fonction $\varphi(t)$ par son expression particulière $4\pi k^2 t$.

Certains résultats sont alors intéressants pour leur simplicité.

L'écart moyen $2k\sqrt{t}$ *est proportionnel à la racine carrée du temps, de même que l'écart probable* $1,688\ldots k\sqrt{t}$.

La considération des écarts isoprobables conduit à cette proposition générale :

Les écarts croissent proportionnellement à la racine carrée du temps.

CHAPITRE XIII.

ÉTUDE DES OPÉRATIONS DE SPÉCULATION.

435. Pour pouvoir faire usage de nos formules, il est nécessaire de déterminer la fonction d'instabilité $\varphi(t)$ ou simplement, si l'on admet l'uniformité, le coefficient d'instabilité k.

En toute rigueur, au point de vue pratique, nos formules devraient tenir compte d'un second coefficient. Le cours que le marché considère étant le plus probable à l'époque t n'est pas exactement le cours actuel; c'est ce qu'on appelle *le cours vrai relatif à l'époque t*; le second coefficient dépend de la différence entre ces deux cours, différence qui est due à ce que, en matière de spéculation, on nomme *report*.

Nous ne nous occuperons pas de ce second coefficient qui est généralement voisin de zéro, sans vouloir insinuer par là que son influence soit toujours négligeable; notre but actuel est surtout de faire connaître les opérations de spéculation, qui sont fort curieuses. La théorie complète des opérations de bourse, la concordance des résultats qu'elle fournit avec la réalité de la marche des cours ont été l'objet d'une étude approfondie que je n'ai pas à reproduire ici. (*Théorie de la spéculation*. Librairie Gauthier-Villars.)

436. **Opérations fermes.** — Il y a deux principales sortes d'opérations de spéculation : les opérations fermes; les opérations à prime.

Ces opérations peuvent se combiner à l'infini, d'autant qu'on traite souvent plusieurs sortes de primes.

L'acheteur ferme ne limite ni son gain ni sa perte; il gagne la différence entre le cours d'achat et le cours auquel il termine son opération par une vente. En d'autres termes, il gagne la valeur de l'écart

quand cet écart est positif, il perd la valeur de l'écart quand cet écart est négatif.

L'inverse a lieu pour le vendeur ferme.

Les formules que nous avons établies expriment les probabilités relatives à l'acheteur qui veut terminer son opération à l'époque t; ce sont les probabilités du premier genre dans la théorie de la spéculation.

L'acheteur, au lieu de se fixer une époque t pour réaliser son opération, peut se fixer d'avance un cours x; la recherche de la probabilité pour qu'il réalise son opération aux différentes époques t (probabilité du second genre) constitue le second problème de la théorie de la spéculation.

437. **Prime simple.** — Le preneur d'une prime simple à la hausse, par exemple, verse d'abord une certaine somme qui est la valeur de la prime. A l'époque de l'échéance t, il gagne comme l'acheteur ferme s'il y a hausse au-dessus du cours actuel, mais il ne perd rien s'il y a baisse.

Le preneur de prime simple perd au maximum la valeur de la prime; son risque est limité à cette somme; son gain, par contre, peut être illimité.

On traite de même des primes à la baisse dont la valeur est évidemment égale à celle de la prime à la hausse qui a même échéance.

438. Pour calculer la valeur de la prime simple, on doit remarquer que le marché, dans son ensemble, suivant la loi dite *de l'offre et de la demande*, ne peut considérer une opération comme favorisant systématiquement l'un des contractants.

Nous énoncerons donc le principe de l'espérance mathématique : *L'espérance mathématique totale de toute spéculation est nulle.*

Appliquons ce principe au preneur de prime simple (à la hausse par exemple); son espérance positive est celle de l'acheteur ferme (n° 433), soit $\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}}$; son espérance négative est la valeur de la prime simple que nous désignerons par a. Ces deux quantités devant être égales, on a

$$a = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Lorsqu'on connaît la valeur de la prime a (donnée par les cotes) relative à une certaine échéance t_1, on connaît les probabilités relatives à cette même époque.

L'écart moyen (n° 420) est le double de la prime simple. L'écart probable est égal à la prime simple multipliée par 1,688.

439. Le preneur de prime simple est en bénéfice quand le cours, au moment de l'échéance, est compris entre a et $+\infty$; en se reportant au Tableau du paragraphe 427, on voit que :

La probabilité de réussite du preneur de prime simple est indépendante de l'époque de l'échéance; elle a pour valeur 0,345.

Ce résultat est indépendant de toute hypothèse sur la forme de la fonction d'instabilité.

440. Si l'on suppose l'uniformité, on a

$$a = k\sqrt{t}.$$

La valeur de la prime simple doit être proportionnelle à la racine carrée du temps.

Elle permet de calculer le coefficient k.

Nous avons vu précédemment que certains résultats sont indépendants de la fonction d'instabilité. Si l'on traitait des primes pour toutes les échéances t, on connaîtrait la fonction $\varphi(t)$ et par suite les probabilités pour toutes les valeurs de t; en réalité, on ne traite des primes que pour certaines échéances t_1, t_2, t_3, ..., de sorte que, si l'on veut calculer les probabilités pour des époques intermédiaires, on doit faire une hypothèse sur la forme de la fonction $\varphi(t)$.

L'hypothèse la plus simple consiste à supposer que $\varphi(t)$ est proportionnel à t, c'est-à-dire à supposer l'uniformité.

Les résultats que nous obtiendrons dans notre étude seront ainsi de trois sortes :

1° Ceux qui sont invariables (par exemple, la probabilité de réussite du preneur de prime simple);

2° Ceux qui sont relatifs à une époque t_1 pour laquelle on traite une

prime. Dans ce cas les probabilités sont connues sans qu'aucune hypothèse soit nécessaire ; on ne connaît pas $\varphi(t)$, mais on connaît $\varphi(t_1)$ qui entre seul dans l'expression des probabilités.

3° Ceux qui sont relatifs à une époque pour laquelle on ne traite pas de primes et qui supposent la loi de l'uniformité.

441. Le *stellage* ou *double prime* est formé de l'achat simultané de deux primes simples, l'une à la hausse, l'autre à la baisse.

Il est facile de voir que le preneur de stellage est en bénéfice dans les intervalles des cours : $2a$, $+\infty$ et $-2a$, $-\infty$. Donc, d'après la Table de probabilité (n° 427),

La probabilité du preneur de stellage est 0,425....

442. **Les primes en général.** — Dans l'achat ou la vente ferme, acheteurs et vendeurs s'exposent à une perte théoriquement illimitée. Dans le marché à prime, l'acheteur paye le titre plus cher que dans le cas du marché ferme, mais sa perte en baisse est limitée d'avance à une certaine somme qui est le montant de la prime.

Le vendeur de prime a l'avantage de vendre plus cher ; mais il ne peut avoir pour bénéfice que le montant de la prime.

On pourrait également traiter des primes à la baisse qui limiteraient la perte du vendeur ; dans ce cas, l'opération se ferait à un cours inférieur à celui du ferme.

On ne traite pas ces primes dans la spéculation sur les valeurs ; on obtient une prime à la baisse d'un genre un peu différent en vendant ferme et en achetant simultanément une prime à la hausse.

Pour fixer les idées, je ne m'occuperai que des primes à la hausse.

Dans une prime il y a trois quantités à considérer : l'importance h de la prime, c'est-à-dire la somme maxima que veut risquer l'acheteur ; le cours l auquel la prime est négociée qu'on nomme l'*écart de la prime ;* enfin l'époque de l'échéance.

Il est d'usage de dire qu'un spéculateur a acheté une prime *dont* h pour exprimer qu'il a acheté une prime dont l'importance est h.

L'achat à prime est assimilable à un achat ferme effectué au cours l, le cours ne pouvant baisser au-dessous de $l - h = m$.

Quand, en réalité, à l'époque de l'échéance, le cours est inférieur à m, la perte de l'acheteur est constante et égale à h.

En d'autres termes, dans l'intervalle de cours $-\infty$, $+m$ (nous supposons m positif pour fixer les idées), la perte est constante et égale à h. De m à $m+h$, la perte décroît de h à zéro. A partir du cours $m+h$, l'acheteur gagne proportionnellement à la hausse.

La prime simple dont nous avons fait l'étude rentre dans la définition générale; on peut dire que c'est une prime dont l'importance est égale à l'écart.

443. Il est évident que, si l'on considère une même échéance, l'écart d'une prime est d'autant plus élevé que l'importance de la prime est plus faible.

Une première question se pose, question que j'ai résolue plusieurs années avant que je ne me sois occupé d'études sur le calcul des probabilités : Est-il possible, en admettant uniquement que l'écart d'une prime diminue quand son importance croît, qu'il existe des opérations permettant à un spéculateur de gagner à tous les cours?

En choisissant convenablement les rapports des écarts de trois primes, on pourrait imaginer une infinité d'opérations permettant de gagner à tous les cours.

Les écarts qu'exigent ces opérations ne sont pas en désaccord avec le bon sens, et, si le marché ne réalise jamais ces écarts et n'en approche même pas, c'est qu'à son insu il obéit à la loi de la probabilité.

444. Pour trouver une relation entre l'importance h d'une prime et son écart $m+h$, nous appliquerons à l'acheteur de prime le principe de l'espérance mathématique :

L'espérance mathématique totale de toute spéculation est nulle.

Soit ϖ la probabilité du cours x à l'époque de l'échéance t.

Nous allons évaluer l'espérance

1° pour les cours compris entre $-\infty$ et m,

2° pour les cours compris entre m et $m+h$,

3° pour les cours compris entre $m+h$ et $+\infty$.

1° Pour les cours compris entre $-\infty$ et m, l'acheteur subit une perte h. Son espérance mathématique pour un cours compris dans l'intervalle donné est $-\varpi h$; elle est donc pour tout l'intervalle

$$-h\int_{-\infty}^{m}\varpi\,dx;$$

2° Pour un cours x compris entre m et $m+h$, la perte de l'acheteur est $m+h-x$; l'espérance mathématique correspondante est $-\varpi(m+h-x)$, et pour tout l'intervalle elle est

$$-\int_{m}^{m+h}\varpi(m+h-x)\,dx;$$

3° Pour un cours x compris entre $m+h$ et ∞, le bénéfice de l'acheteur est $x-m-h$; l'espérance mathématique correspondante est $\varpi(x-m-h)$ et pour l'intervalle entier

$$\int_{m+h}^{\infty}\varpi(x-m-h)\,dx.$$

Le principe de l'espérance totale nous conduit donc à la relation

$$\int_{m+h}^{\infty}\varpi(x-m-h)\,dx-\int_{m}^{m+h}\varpi(m+h-x)\,dx-h\int_{-\infty}^{m}\varpi\,dx=0,$$

ou, en faisant les réductions,

$$h+m\int_{m}^{\infty}\varpi\,dx=\int_{m}^{\infty}\varpi x\,dx.$$

Cette équation aux intégrales définies établit une relation entre l'écart et l'importance d'une prime; on l'aurait obtenue de même en supposant m négatif.

445. Si, dans cette équation, on remplace ϖ par sa valeur,

$$\varpi=\frac{1}{2\pi a}e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}},$$

et, si l'on développe l'intégrale en série, on obtient

$$h-a+\frac{m}{2}-\frac{m^2}{4\pi a}+\frac{m^4}{96\pi^2a^3}-\frac{m^6}{1920\pi^3a^5}+\ldots=0.$$

Cette formule, qui exprime la loi des écarts de prime, fournit une relation entre l'importance h de la prime, son écart $m+h$, et l'importance a de la prime simple relative a la même échéance; elle permet donc de calculer l'une quelconque de ces quantités quand on connait les autres.

Si, par exemple, m et $m+h$ sont connus, la série précédente permet de déterminer a.

Pratiquement, l'importance de la prime est toujours comprise entre $\frac{a}{3}$ et $3a$. Il en résulte qu'on peut, dans la formule précédente, supprimer les termes en m^6 et en m^4. On obtient aussi

$$a = \frac{\pi(2h+m) \pm \sqrt{\pi^2(2h+m)^2 - 4\pi m^2}}{4\pi}.$$

Avec cette même approximation on aura pour valeur de m en fonction de a et de h

$$m = \pi a \pm \sqrt{\pi^2 a^2 - 4\pi a(a-h)}.$$

Cette dernière formule est très recommandable pour les calculs numériques, mais elle présente deux inconvénients : elle n'est pas facilement exprimable en langage ordinaire, et elle ne donne pas une idée suffisamment claire des variations de l'écart et de l'importance des primes. Les formules que nous obtiendrons, inférieures à la précédente au point de vue du calcul numérique, ont, par contre, l'avantage d'être très expressives et très simples.

446. On peut introduire dans la formule complète du n° 445 la valeur $l = m + h$ de l'écart de la prime; la formule devient alors

$$\frac{h+l-a}{2} - \frac{(l-h)^2}{4\pi a} + \frac{(l-h)^4}{96\pi^2 a^3} - \frac{(l-h)^6}{1920\pi^3 a^5} + \ldots = 0;$$

elle ne change pas si l'on remplace l par h et h par l; donc, si l'écart de la prime dont h est l, réciproquement, l'écart de la prime dont l est h.

Ce *théorème de réciprocité* peut se démontrer sans faire appel à aucune formule analytique; il suffit de supposer qu'un spéculateur achète une prime dont h à l'écart l et vende ferme simultanément; on

voit sans difficulté que la résultante de cette double opération est une prime à la baisse dont l'importance est l et dont l'écart est h.

Les deux opérations composantes étant équitables, leur résultante l'est également, ce qui démontre le théorème de réciprocité.

Dans la formule complète du paragraphe 445,

$$(1)\qquad h = a - \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4\pi a} - \frac{m^4}{96\pi^2 a^3} + \frac{m^6}{1920\pi^3 a^5} - \ldots,$$

on peut remplacer h par l; on obtient ainsi

$$(2)\qquad l = a + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4\pi a} - \frac{m^4}{96\pi^2 a^3} + \frac{m^6}{1920\pi^3 a^5} - \ldots.$$

447. L'écart d'une prime augmentant quand son importance diminue, il est intéressant d'étudier la variation du produit de ces quantités.

Les formules (1) et (2) peuvent s'écrire

$$h = a - \frac{m}{2} + f(m), \qquad l = a + \frac{m}{2} + f(m).$$

Le produit hl a pour valeur

$$a^2 - \frac{m^2}{4} + 2a\,f(m) + [f(m)]^2;$$

sa dérivée relative à m

$$-\frac{m}{2} + 2a\,f'(m) + 2\,f(m)\,f'(m)$$

s'annule quand $m = 0$, car, pour cette valeur, f' est nul; alors $h = l = a$.

Le produit d'une prime par son écart est donc maximum quand les deux facteurs de ce produit sont égaux; c'est le cas de la prime simple.

En multipliant les séries (1) et (2), on a d'ailleurs

$$(3)\qquad hl = a^2 - \frac{(\pi - 2)m^2}{4\pi} + \frac{4m^4}{96\pi^2 a^2} - \ldots.$$

On pourrait poser en première approximation

$$hl = a^2;$$

le produit d'une prime par son écart serait alors constant.

Si l'on donne a et h, la valeur qu'on obtient pour l'écart l par la formule précédente est trop grande.

Si l'on donne h et l, la valeur qu'on en déduit pour a est trop faible.

Si l'on admet la loi précédente et l'uniformité, $a^2 = k^2 t$, et, si l'on considère des primes de même importance h, leur écart l est proportionnel au temps.

448. La loi précédente n'est pas suffisamment approchée; on obtient, au contraire, une loi très approchée en procédant de la façon suivante :

Ajoutant les séries (1) et (2), on obtient

$$h + l = 2a + \frac{2m^2}{4\pi a} - \frac{2m^4}{96\pi^2 a^3} + \frac{2m^6}{1920\pi^3 a^5} - \ldots.$$

Multipliant cette série par la série (3), on a

$$hl(h+l) = 2a^3 - \frac{2(\pi - 3)am^2}{4\pi} - \frac{(12\pi - 30)m^4}{96\pi^2 a} + \ldots$$

ou environ

$$hl(h+l) = 2a^3 - 0{,}0225\,am^2 - 0{,}0081\,\frac{m^4}{a} + \ldots.$$

On peut poser en seconde approximation

$$hl(h+l) = 2a^3.$$

L'erreur commise est très faible lorsque m n'a pas une grande valeur, ce qui est le cas ordinaire. Par exemple, si $m = a$, l'erreur du second membre est inférieure à $\frac{2}{100}$.

La loi de seconde approximation peut s'énoncer en langage ordinaire d'une façon très simple :

On multiplie la prime par son écart.

On additionne la prime et son écart.

Le produit de deux nombres est le même pour toutes les primes relatives à la même échéance.

449. Pour donner une idée de l'approximation obtenue par les formules précédentes, plaçons-nous dans les conditions les plus défavo-

rables qu'on puisse rencontrer pratiquement et supposons qu'il s'agisse de déterminer l'écart d'une très petite prime, $h = \frac{a}{3}$.

La formule de première approximation du n° 447 donne la valeur beaucoup trop grande $l = 3a$.

La formule de seconde approximation du n° 448 conduit à la valeur $2,28a$.

La formule approchée du n° 445 donnerait $2,25a$.

La valeur exacte est $l = 2,23a$.

En général, les données du problème ne sont pas a et h; on donne l'écart l_1 de la prime dont h_1, et l'on demande l'écart l de la prime dont h.

On emploie alors la formule

$$hl(h + l) = h_1 l_1 (h_1 + l_1).$$

Cette égalité est excessivement approchée surtout lorsque h est voisin de l_1, elle serait rigoureuse si h était égal à l_1. Dans ce cas d'ailleurs, la formule de première approximation $hl = h_1 l_1$ serait rigoureuse également, d'après le théorème de réciprocité.

450. Pour pouvoir appliquer ces formules, il importe de remarquer que l'écart $l = m + h$ n'est pas exactement celui qui est fourni par les cotes et qu'il peut en différer d'une façon sensible. Nous avons parlé du cours vrai (n° 435); l'écart $l = m + h$ est l'écart vrai, c'est-à-dire la différence entre le cours de la prime et le cours vrai correspondant à l'époque de l'échéance.

Nous n'avons pas ici à étudier ces questions. Qu'il nous suffise de remarquer le parfait accord entre la théorie mathématique et l'observation des cotes; qu'il s'agisse des rapports des écarts des primes ou de leur probabilité de réussite, qu'il s'agisse des problèmes très différents que nous étudierons dans le prochain Chapitre ou d'une application quelconque de nos formules, les divergences des résultats obtenus par les deux méthodes sont toujours très faibles si l'observation porte sur un nombre de cas suffisant.

C'est parce que le marché de la rente ne semble suivre aucune loi qu'il suit fatalement la loi du hasard.

451. **Facultés.** — On traite sur certains marchés des opérations en quelque sorte intermédiaires entre les opérations fermes et les opérations à prime : ce sont les *facultés.*

Supposons que 30^{fr} soient le cours d'une marchandise. Au lieu d'acheter une unité au cours de 30^{fr} pour une échéance donnée, nous pouvons acheter une faculté du double pour la même échéance à 32^{fr}, par exemple. Il faut entendre par là que pour toute différence au-dessous du cours de 32^{fr} nous ne perdons que sur une unité, alors que, pour toute différence au-dessus, nous gagnons sur deux unités.

Nous aurions pu acheter une faculté du triple à 33^{fr}, par exemple, c'est-à-dire que, pour toute différence au-dessous du cours de 33^{fr}, nous perdons sur une unité, alors que pour toute différence au-dessus de ce cours nous gagnons sur trois unités. On peut imaginer des facultés d'un ordre multiple.

On traite aussi des facultés à la baisse, nécessairement au même écart que les facultés à la hausse du même ordre de multiplicité.

452. Appliquons le principe de l'espérance mathématique à l'achat d'une faculté d'ordre n traitée à l'écart r.

La faculté d'ordre n peut être considérée comme se composant de deux opérations :

1° Un achat ferme d'une unité au cours r;

2° Un achat ferme de $(n-1)$ unités au cours r, cet achat n'étant à considérer que dans l'intervalle r, ∞.

La première opération a pour espérance mathématique $-r$; la seconde a pour espérance

$$(n-1)\int_r^\infty \varpi(x-r)\,dx.$$

On doit donc avoir

$$r=(n-1)\int_r^\infty \varpi(x-r)\,dx,$$

ou, en remplaçant ϖ par sa valeur,

$$\varpi=\frac{1}{2\pi a}e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}}.$$

et, en développant en série,

$$2\pi a^2 - \pi a \frac{n+1}{n-1} r + \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{48\pi a^2} - \ldots = 0.$$

En ne conservant que les trois premiers termes, on obtient

$$r = a\left[\frac{n+1}{n-1}\pi - \sqrt{\left(\frac{n+1}{n-1}\pi\right)^2 - 4\pi}\right].$$

Si $n = 2$,

$$r = 0,68a.$$

L'écart de la faculté du double doit être environ les $\frac{2}{3}$ de la valeur de la prime simple.

Si $n = 3$,

$$r = 1,096a.$$

L'écart de la faculté du triple doit être supérieur de $\frac{1}{10}$ environ à la valeur de la prime simple.

453. Nous venons de voir que les écarts des facultés sont approximativement proportionnels à la quantité a.

Il en résulte que la probabilité de réussite de ces opérations est indépendante de la durée de l'échéance.

La probabilité de réussite de la faculté du double est 0,394 : *l'opération réussit quatre fois sur dix.*

La probabilité de la faculté du triple est 0,33 : *l'opération réussit une fois sur trois.*

454. **Opérations complexes.** — Comme on traite du ferme et souvent jusqu'à trois primes pour la même échéance, on pourrait entreprendre en même temps des opérations triples et même quadruples.

En réalité, les opérations simples et doubles sont les seules employées ; on les divise en deux catégories suivant qu'elles contiennent ou non du ferme.

L'étude de ces opérations est très curieuse, mais nous ne pouvons la reproduire ici ; elle a été traitée ailleurs avec tout le développement que comporte son utilité et son intérêt.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DE LA SPÉCULATION. PROBABILITÉS DU SECOND GENRE.

---

455. Nous désignerons comme précédemment par $\mathfrak{P}$ la probabilité pour qu'un cours donné soit atteint ou dépassé à l'époque t. $\mathfrak{P}$ est la probabilité du premier genre. P désignera la probabilité pour que le cours considéré soit atteint ou dépassé dans l'intervalle de temps t, c'est-à-dire avant l'époque t. P est la probabilité du second genre.

La probabilité pour qu'un cours soit dépassé à l'époque t est la moitié de la probabilité pour que ce cours soit dépassé dans l'intervalle de temps t.

En effet, le cours ne peut être dépassé à l'époque t sans l'avoir été antérieurement. La probabilité $\mathfrak{P}$ est donc égale à la probabilité P, multipliée par la probabilité pour que, le cours étant coté à une époque antérieure à t, soit dépassé à l'époque t, c'est-à-dire multipliée par $\frac{1}{2}$.

On a donc

$$\mathfrak{P} = \frac{P}{2}.$$

La probabilité pour que le cours c soit dépassé pendant l'intervalle de temps t a pour expression

$$P = 2\mathfrak{P} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{c}{\sqrt{4kt}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

ou

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{c}{2\sqrt{\pi}\, a}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

456. Si aucune limite n'est fixée pour le temps t, la formule donne $P = 1$: dans ce cas, l'époque moyenne à laquelle le cours est atteint est infinie, comme nous le verrons (n° 472).

457. **Quelques applications.** — Les Tables de la fonction Θ permettent de calculer la fonction

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{c}{2\sqrt{\pi a}}} e^{-\lambda^2} d\lambda = 1 - \Theta\left(\frac{c}{2\sqrt{\pi}\, a}\right);$$

mais il est généralement beaucoup plus simple d'avoir recours à la Table de probabilité du paragraphe 427, dont il suffit de doubler les chiffres puisque $P = 2\mathfrak{P}$.

458. Cherchons, par exemple, la probabilité pour que l'écart de la prime simple a soit atteint avant l'échéance de cette prime.

La probabilité $\mathfrak{P}$ relative au cours a est (n° 427) 0,345; donc la probabilité P relative au même cours est $2 \times 0,345 = 0,69$.

Il faut bien remarquer que ce chiffre exprime la probabilité pour que l'écart a soit atteint dans un sens déterminé, à la hausse, par exemple. La recherche de la probabilité pour que l'intervalle $\pm a$ soit dépassé avant l'époque t dans un sens quelconque constitue un problème beaucoup plus compliqué, qui sera résolu plus loin (n° 477).

459. Cherchons encore la probabilité pour que l'écart $2a$ soit atteint (dans un seul sens), avant l'époque t.

La probabilité $\mathfrak{P}$ relative au cours $2a$ étant 0,213, la probabilité P relative au même cours sera égale au double de cette quantité, soit 0,425.

La probabilité pour que l'écart de la faculté du double soit atteint est 0,78. Pour la faculté du triple, la probabilité serait 0,66.

460. **Probabilité élémentaire.** — Nous avons désigné par ϖ la probabilité pour qu'un cours soit coté à l'époque t; c'est la probabilité élémentaire du premier genre. Nous désignerons par Π la probabilité pour que ce cours soit coté pour la première fois à l'époque t, c'est-à-dire la probabilité élémentaire du second genre. Π est donc la proba-

bilité pour que le cours soit coté à l'époque t, ne l'ayant pas été auparavant.

On a évidemment

$$\int_0^t \mathrm{H}\,dt = \mathrm{P} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{H} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t},$$

par suite,

$$\mathrm{H} = \frac{c\,\varphi'(t)\,e^{-\frac{c^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(t)\sqrt{\varphi(t)}}\,dt.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que le cours c soit atteint pour la première fois à l'époque t.

$\varphi'(t)dt$ est la fonction d'instabilité relative à l'instant t (c'est-à-dire à l'intervalle de temps t, $t+dt$); la probabilité pour qu'un cours soit atteint à un certain instant est donc proportionnelle à la fonction d'instabilité relative à cet instant.

Si l'on suppose l'uniformité, on a

$$\mathrm{H} = \frac{c\,e^{-\frac{c^2}{4\pi k^2 t}}}{2\pi k t\sqrt{t}}\,dt.$$

461. **Distribution des probabilités.** — La connaissance de la probabilité pour que le cours c soit atteint à une époque donnée ne résout pas d'une façon complète le problème que nous nous sommes proposé; il nous reste à étudier le cas où le cours c n'est pas atteint avant l'époque t.

Nous allons chercher la probabilité pour que le cours soit $c-y$ à l'époque t, le cours c n'ayant jamais été atteint avant l'époque t.

On peut supposer par exemple qu'on achète de la rente pour la revendre avec un bénéfice c avant l'époque t; le problème actuel consiste à chercher la probabilité pour qu'on réalise à l'époque t le gain $c-y$ si la revente n'a pu être effectuée, le cours c n'ayant pas été atteint.

Lorsque le cours c est atteint, il y a, par suite de la symétrie de la probabilité, autant de chances pour qu'il se produise, à l'époque t, un nouvel écart $+y$ qu'un nouvel écart $-y$.

La possibilité, pour le spéculateur, de réaliser son opération au cours c supprime donc pour lui, en même temps que la probabilité du gain $c+y$ une probabilité égale pour le gain $c-y$.

La possibilité de la réalisation au cours c diminue donc la probabilité ϖ_{c-y} du cours $c-y$ de la quantité ϖ_{c+y}.

La probabilité du cours $c-y$ à l'époque t est donc

$$\varpi_{c-y} - \varpi_{c+y}$$

ou

$$\frac{1}{2\pi a}\left[e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}} - e^{-\frac{(2c-x)^2}{4\pi a^2}}\right],$$

x désignant le cours rapporté à l'origine ordinaire.

Nous connaissons maintenant les probabilités pour que le cours c soit atteint à toutes les époques entre zéro et t et toutes les probabilités relatives à l'époque t; nous connaissons donc d'une façon complète la distribution des probabilités.

462. Pour obtenir le cours dont la probabilité est la plus grande, dans le cas où le cours c n'a pas été atteint, il suffit de poser $\frac{d\varpi}{dx} = 0$; on obtient ainsi

$$\frac{x}{2c-x} + e^{-\frac{c(c-x)}{\pi a^2}} = 0.$$

Si l'on suppose $c = a$, on obtient

$$x_m = -1,5a;$$

si l'on suppose $c = 2a$, on obtient

$$x_m = -0,4a.$$

Enfin, on obtiendrait

$$x_m = -c,$$

si c était égal à $1,33a$.

463. La probabilité dans l'intervalle zéro, $+u$, a pour valeur

$$\frac{1}{2\pi a}\int_0^u e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}}\,dx - \frac{1}{2\pi a}\int_0^u e^{-\frac{(2c-x)^2}{4\pi a^2}}\,dx.$$

Il est intéressant d'étudier le cas où $u = c$ pour connaître la pro-

babilité de bénéfice d'un achat ferme lorsque le cours de revente n'a pu être atteint.

Dans l'hypothèse où $u = c$, la formule ci-dessus devient

$$\frac{1}{2\pi a}\int_0^c e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}}dx - \frac{1}{2\pi a}\int_0^c e^{-\frac{(2c-x)^2}{4\pi a^2}}dx.$$

ou, en posant dans la première intégrale $\frac{x}{2\sqrt{\pi}a} = \lambda$ et dans la seconde $\frac{2c-x}{2\sqrt{\pi}a} = \lambda$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{c}{2\sqrt{\pi}a}} e^{-\lambda^2}d\lambda - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{2c}{2\sqrt{\pi}a}} e^{-\lambda^2}d\lambda,$$

ou encore

$$\Theta\left(\frac{c}{2\sqrt{\pi}a}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{2c}{2\sqrt{\pi}a}\right)$$

ou enfin

$$\frac{1}{2} - 2\mathfrak{P}_c + \mathfrak{P}_{2c},$$

c étant exprimé en prenant a pour unité et $\mathfrak{P}$ se calculant d'après la Table du paragraphe 427.

464. Si $c = a$, la probabilité est 0,024. Si l'écart a n'a jamais été atteint dans l'intervalle t, il n'y a que trois chances sur cent pour que, à l'époque t, le cours se trouve compris entre zéro et a.

Si $c = 2a$, la probabilité est 0,127; l'écart $2a$ n'ayant jamais été atteint dans l'intervalle t, il y a treize chances sur cent pour que, à l'époque t, le cours se trouve compris entre zéro et $2a$.

465. **Espérance mathématique.** — Nous supposons comme précédemment qu'il s'agit d'un spéculateur qui achète de la rente au cours actuel pour la revendre quand le cours est c ou pour la revendre à l'époque t si le cours c n'a pas été atteint avant cette époque t.

L'espérance positive se compose de deux termes; l'un cP correspond au cas où le cours c est atteint avant l'époque t; l'autre

$$\int_0^c \frac{x}{2\pi a}\left[e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}} - e^{-\frac{(2c-x)^2}{4\pi a^2}}\right]dx$$

est relatif au cas où le cours est compris entre zéro et c à l'époque t.

L'espérance positive a pour valeur

$$\mathcal{E} = c + a\left(1 - e^{-\frac{c^2}{\pi a}}\right) - \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{2c}{2\sqrt{\pi}a}} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Lorsque c tend vers l'infini, $\mathcal{E}$ tend vers a.

466. L'*écart moyen relatif* en baisse, lorsque le cours c n'est pas atteint, a pour valeur

$$\frac{\int_{-\infty}^{0} \varpi x\, dx}{\int_{-\infty}^{0} \varpi\, dx} = \frac{\mathcal{E}}{1 - P - P_1},$$

P_1 désignant la quantité $\int_0^c \varpi\, dx$.

L'écart moyen a donc pour valeur $2{,}54a$ lorsque $c = a$ et $2{,}16a$ lorsque $c = 2a$.

Si l'on suppose $c = \infty$, on voit que l'écart moyen est égal à $2a$, résultat déjà obtenu.

467. **Époque de la plus grande probabilité.** — La probabilité pour qu'un cours donné c soit atteint à l'époque t est, en supposant l'uniformité (n° 460),

$$\frac{c e^{-\frac{c^2}{4\pi k^2 t}}}{2\pi k t \sqrt{t}}.$$

Pour déterminer l'époque t à laquelle correspond la plus grande probabilité, il suffit d'annuler la dérivée par rapport à t de cette expression, c'est-à-dire de poser

$$\frac{c e^{-\frac{c^2}{4\pi k^2 t}}}{2\pi k t \sqrt{t}}\left(\frac{c^2}{4\pi k^2 t} - \frac{3}{2}\right) = 0,$$

d'où

$$t = \frac{c^2}{6\pi k^2}.$$

468. Supposons, par exemple, que $c = k\sqrt{t_1} = a$: nous aurons

$$t = \frac{t_1}{6\pi}.$$

L'époque la plus probable à laquelle est atteint l'écart de la prime simple est située au $\frac{1}{18}$ de l'époque de l'échéance de la prime.

Si $c = 2k\sqrt{t_1} = 2a$, on obtient $t = \frac{2t_1}{3\pi}$.

L'époque la plus probable à laquelle l'écart d'une double prime ou écart moyen est atteint est située au $\frac{1}{5}$ de l'époque de l'échéance de la prime.

469. La probabilité P correspondant à l'époque $t = \frac{c^2}{6\pi k^2}$ a pour valeur 0,08. Lorsque t croît de zéro à $\frac{c^2}{6\pi k^2}$, la probabilité $\Pi = \frac{\partial P}{\partial t}$ pour que le cours c soit atteint à l'époque t croît très vite jusqu'à son maximum. Ces probabilités croissantes ne représentent que les $\frac{8}{100}$ de la totalité.

470. **Époque probable.** — L'*époque probable absolue* à laquelle le cours c est atteint est définie par l'équation

$$P = \Theta\left(\frac{c}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2};$$

on en déduit

$$t = \frac{c^2}{2,89k^2}.$$

L'époque probable absolue varie, de même que l'époque la plus probable, proportionnellement au carré de la quantité c, et elle est environ six fois supérieure à l'époque la plus probable.

471. L'*époque probable relative* à une durée t et au cours c, époque que nous désignerons par T, est définie par l'équation

$$\int_0^T \frac{\partial P}{\partial t}dt = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial P}{\partial t}dt$$

ou

$$1 - 2\Theta\left(\frac{c}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{T}}\right) = -\Theta\left(\frac{c}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}\right).$$

Si, par exemple, $c = k\sqrt{t}$, la formule donne $T = 0,18t$. Donc, lorsque l'écart de la prime simple est atteint, il l'est, dans la moitié des cas, dans le premier cinquième de la durée de l'opération.

Si $c = 2k\sqrt{t}$, nous trouvons $T = 0,42t$. Donc, lorsque l'écart de la double prime ou si l'on veut l'écart moyen est atteint dans un sens déterminé, on peut parier à égalité qu'il a été atteint dans les quatre premiers dixièmes de la durée de l'opération.

L'époque probable relative serait $0,11t$ pour l'écart de la faculté du double et $0,21t$ pour l'écart de la faculté du triple.

Enfin l'époque probable serait à la moitié de la durée totale si c était égal à $2,5k\sqrt{t}$.

472. **Époque moyenne.** — Lorsqu'un événement peut se produire à différentes époques, on appelle *époque moyenne de l'arrivée de l'événement* la somme des produits des probabilités correspondant aux époques données par leurs durées respectives.

La durée moyenne est la somme des espérances de durée.

Si aucune limite n'est fixée d'avance pour la durée, l'*époque moyenne* à laquelle le cours c est dépassé est définie par l'intégrale

$$\int_0^\infty t\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t}\,dt = \int_0^\infty \frac{c\,e^{-\frac{c^2}{4\pi k^2 t}}}{2\pi k\sqrt{t}}\,dt;$$

en posant

$$\frac{c^2}{4\pi k^2 t} = \lambda^2,$$

elle devient

$$\frac{c^2}{2\pi\sqrt{\pi}\,k^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2}\,d\lambda.$$

Cette intégrale est infinie.

L'époque moyenne est donc infinie.

473. Occupons-nous maintenant du cas où la durée est limitée à l'époque t; nous appellerons *époque moyenne relative* l'époque moyenne à laquelle le cours c sera atteint quand il le sera.

Cette durée moyenne a pour valeur l'intégrale

$$\frac{1}{P}\int_0^t t\frac{\partial P}{\partial t}dt = \frac{1}{P}\int_0^t \frac{c\,e^{-\frac{c^2}{4\pi k^2 t}}}{2\pi k\sqrt{t}}dt.$$

En posant

$$\frac{c^2}{4\pi k^2 t} = \lambda^2,$$

l'intégrale devient

$$\frac{c^2}{2\pi\sqrt{\pi}k^2}\int_{\frac{c}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2}d\lambda.$$

Transformons-la en remarquant que de l'égalité

$$\int_u^\infty e^{-\lambda^2}d\lambda = \int_u^\infty \frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda^2}\,2\lambda\,d\lambda$$

on déduit, en intégrant par parties,

$$\int_u^\infty e^{-\lambda^2}d\lambda = \frac{e^{-u^2}}{2u} - \int_u^\infty e^{-\lambda^2}\frac{d\lambda}{2\lambda^2}.$$

L'expression proposée devient alors

$$\frac{c}{P}\frac{\sqrt{t}}{\pi k}e^{-\frac{c^2}{4\pi k^2 t}} + \frac{c^2}{2\pi k^2}.$$

474. Lorsque la durée est limitée à l'époque t, l'*époque moyenne absolue* est définie par la formule

$$\int_0^t t\frac{\partial P}{\partial t}dt + t(1-P).$$

L'intégrale a été calculée au paragraphe précédent; l'expression complète peut s'écrire

$$\frac{c\sqrt{t}}{\pi k}e^{-\frac{c^2}{4\pi k^2 t}} + \frac{c^2 P}{2\pi k^2} + t(1-P).$$

Lorsque t est très grand, elle se réduit sensiblement à

$$\frac{2c\sqrt{t}}{\pi k};$$

elle est proportionnelle à la racine carrée du temps.

Lorsque t augmente indéfiniment, elle tend vers l'infini, résultat déjà obtenu.

475. **Écart maximum.** — Quelle est la probabilité pour que le cours c soit le plus haut cours coté dans l'intervalle de temps t?

La probabilité cherchée est la différence entre les probabilités pour que les cours c et $c + dc$ soient atteints ou dépassés, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial c} = \frac{e^{-\frac{c^2}{4\pi a^2}}}{\pi a} = 2\varpi.$$

La probabilité pour qu'un cours soit le plus haut coté dans l'intervalle de temps t est le double de la probabilité pour que ce même cours soit coté à l'époque t.

476. On pourrait imaginer une nouvelle sorte de prime : moyennant le paiement d'une certaine prime, on toucherait la différence entre le cours actuel et le plus haut cours atteint dans l'intervalle de temps t. La valeur de cette prime

$$\int_0^\infty 2\varpi x \, dx = 2a$$

devrait être le double de la valeur de la prime simple relative à la même époque.

Une prime de même valeur serait relative à la différence entre le cours actuel et le plus bas cours coté dans l'intervalle de temps t.

En achetant ces deux primes, c'est-à-dire en versant la somme $4a$, on toucherait le plus grand écart dans chaque sens, c'est-à-dire la différence entre le plus haut et le plus bas cours cotés dans l'intervalle de temps t.

CHAPITRE XV.

THÉORIE DE LA SPÉCULATION. PROBABILITÉS DU TROISIÈME GENRE.

477. *Quelle est la probabilité pour que le cours c (supposé positif pour fixer les idées) soit atteint et dépassé dans l'intervalle de temps t, les variations en baisse n'ayant jamais atteint un cours donné — b.*

Nous croyons utile de présenter l'énoncé sous une forme plus explicite, en l'appliquant à un exemple :

J'achète de la rente (à terme) avec l'intention de la revendre dans un mois si, dans cet intervalle de temps, elle se trouve à un moment donné 1^{fr} au-dessus de son cours actuel. Voulant limiter mon risque à 2^{fr}, je m'engage à revendre ma rente si, dans le courant du mois, il se produit une baisse de 2^{fr} au-dessous du cours actuel.

On demande : la probabilité pour que, dans le courant du mois, j'aie pu revendre avec le bénéfice de 1^{fr} ; la probabilité pour que j'aie revendu avec 2^{fr} de perte, et la probabilité pour que, au bout du mois, je n'aie pu faire aucune des reventes.

Nous désignerons par $P_{c,\infty}$ la probabilité déjà calculée (n° 455) pour que le cours c soit dépassé en supposant b infini.

Une première approximation consiste à poser

$$P_{c,b} = P_{c,\infty};$$

il est évident qu'elle donne pour $P_{c,b}$ une valeur trop forte. De toutes les séries d'alternatives de hausse et de baisse qui forment la probabilité $P_{c,\infty}$, il faut, en effet, retrancher celles pour lesquelles le cours $-b$ aurait été franchi à un moment donné. Or, au moment où le cours $-b$ est atteint, le cours c n'est ni plus ni moins probable par suite de la symétrie de la probabilité que le cours symétrique $-(c+2b)$.

Donc, à chaque série d'alternatives de hausse et de baisse dépassant le cours $-b$ en baisse et revenant au cours c avant l'époque t, correspond une série aboutissant en baisse au cours $-(c+2b)$. Et, comme aucune des premières n'a dépassé, par hypothèse, l'intervalle c en hausse, aucune des symétriques ne dépassera l'intervalle $-(c+2b)$ en baisse.

C'est ce qui nous incite à poser en seconde approximation

$$P_{c,b} = P_{c,\infty} - P_{c+2b,\infty}.$$

En retranchant $P_{c+2b,\infty}$, nous avons retranché à tort des séries qui ont abouti au cours $-(c+2b)$ en baisse ayant dépassé d'abord le cours c en hausse. Mais, lorsque le cours c est atteint en hausse, le cours $-(c+2b)$ n'est ni plus ni moins probable, par suite de la symétrie de la probabilité que le cours symétrique $3c+2b$ en hausse.

C'est ce qui nous incite à poser en troisième approximation

$$P_{c,b} = P_{c,\infty} - P_{c+2b,\infty} + P_{3c+2b,\infty}.$$

En continuant le même raisonnement, nous serons conduits à la série

$$P_{c,b} = P_{c,\infty} - P_{c+2b,\infty} + P_{3c+2b,\infty} - P_{3c+4b,\infty} + P_{5c+4b,\infty} - \dots$$

C'est la formule fondamentale de notre étude.

Les probabilités $P_{c,b}$ et $P_{b,c}$ sont les probabilités du troisième genre.

On peut encore écrire

$$P_{c,b} = 2\mathfrak{P}_{c,\infty} - 2\mathfrak{P}_{c+2b,\infty} + 2\mathfrak{P}_{3c+2b,\infty} - 2\mathfrak{P}_{3c+4b,\infty} + \dots$$

478. La probabilité pour que le cours $-b$ soit atteint dans l'intervalle de temps t, les variations en hausse n'ayant jamais atteint le cours c, s'obtiendra en remplaçant dans les formules précédentes b par c et c par b. La probabilité pour que, jusqu'à l'époque t, le cours ne soit pas sorti de l'intervalle $-b$, $+c$ est

$$1 - P_{c,b} - P_{b,c}.$$

En différentiant par rapport à t la formule

$$P_{b,c} = P_{b,\infty} - P_{b+2c,\infty} + P_{3b+2c,\infty} - P_{3b+4c,\infty} + \dots$$

on obtient la probabilité pour que le cours $-b$ soit atteint pour la

première fois à l'époque t, les variations en hausse n'ayant pas précédemment atteint le cours c.

$$\Pi_{b,c} = \Pi_{b,\infty} - \Pi_{b+2c,\infty} + \Pi_{3b+2c,\infty} - \Pi_{3b+4c,\infty} + \ldots$$

Cette formule peut se démontrer directement comme celle du n° 477.

Les quantités telles que $\Pi_{b,c}$ sont les probabilités élémentaires du troisième genre. Les probabilités du troisième genre sont exprimées par des séries de probabilités du second genre (n° 460).

479. Si aucune limite n'est fixée pour le temps, c'est-à-dire si $t = \infty$, les expressions des probabilités P prennent la forme indéterminée

$$P_{c,b} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Les probabilités se déterminent alors par le principe de l'espérance mathématique. Le spéculateur ayant pour probabilité $P_{c,b}$ de gagner l'écart c et pour probabilité $P_{b,c} = 1 - P_{c,b}$ de perdre l'écart b, on a

$$c P_{c,b} = b(1 - P_{b,c}),$$

d'où

$$P_{c,b} = \frac{b}{c+b}, \qquad P_{b,c} = \frac{c}{c+b}.$$

480. **Quelques applications.** — Les formules qui précèdent sont susceptibles d'un grand nombre d'applications intéressantes :

1° Si l'on suppose $b = c = a = k\sqrt{t}$, $P_{a,a}$ est égal à 0,498. La probabilité pour que le cours ne sorte pas de l'intervalle est très faible :

$$1 - 2 \times 0{,}498 = 0{,}004.$$

2° Lorsque $b = c = 2a$, $P_{2a,2a} = 0.410$; la probabilité pour que le cours reste compris dans l'intervalle $\pm 2a$ est

$$1 - 2 \times 0{,}41 = 0{,}18.$$

Si l'on achète une double prime avec l'idée préconçue de revendre ferme si l'écart $2a$ est atteint en hausse, ou de racheter ferme si l'écart $2a$ est atteint en baisse, la probabilité pour que l'une des deux opérations puisse s'effectuer est 0,82. Remarquons que $P_{2a,2a} = 0{,}41$ alors que $P_{2a,\infty} = 0{,}425$. Quand l'écart en hausse et en baisse est supérieur

à $2a$, la probabilité pour qu'un cours soit atteint dans un sens est à peu près la même que si les variations dans l'autre sens pouvaient être quelconques.

3° Supposons que $c = a$ et que $b = 2a$; la probabilité pour que le cours c soit atteint, $P_{c,b}$, est 0,652, et la probabilité pour que le cours $b = -2a$ soit atteint est

$$P_{b,c} = 0,325;$$

la probabilité pour que le cours reste dans l'intervalle considéré est

$$1 - 0,652 - 0,325 = 0,023.$$

Si nous avions supposé *a priori* cette probabilité négligeable, nous aurions obtenu par les formules du paragraphe 479 les valeurs très suffisamment approchées

$$P_{c,b} = 0,666 \qquad \text{et} \qquad P_{b,c} = 0,333.$$

481. **Écart maximum.** — *Quelle est la probabilité pour que, dans l'intervalle de temps t, le plus grand écart dans un sens ou dans l'autre ait une valeur donnée c.*

La probabilité demandée est

$$\frac{\partial}{\partial c}(1 - 2\,P_{c,c})$$

ou

$$\frac{4\,dc}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\left[e^{-\frac{c^2}{\varphi(t)}} - 3\,e^{-\frac{(3c)^2}{\varphi(t)}} + 5\,e^{-\frac{(5c)^2}{\varphi(t)}} - 7\,e^{-\frac{(7c)^2}{\varphi(t)}} + \ldots\right].$$

La courbe qui représente la variation de cette probabilité est tangente à l'axe des x à l'origine, et à l'infini, elle présente deux points d'inflexion; l'ordonnée est maxima lorsque $c = 0,642\ldots\sqrt{\varphi(t)}$.

La valeur la plus probable de l'écart maximum est $0,642\ldots\sqrt{\varphi(t)}$.

Lorsque c est très grand, la série se réduit à son premier terme, et la probabilité pour que l'écart maximum soit c dans l'intervalle de temps t est le double de la probabilité pour que l'écart final soit c.

La probabilité maxima, c'est-à-dire l'ordonnée maxima de la courbe, décroît comme $\frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}}$.

Les abscisses des points d'inflexion croissent proportionnellement à $\sqrt{\varphi(t)}$.

La remarque qui a été faite au n° 384 pourrait évidemment s'appliquer au cas considéré.

482. **Second écart moyen.** — Nous appellerons *second écart moyen* la valeur moyenne du plus grand écart existant entre le cours actuel et tous les cours cotés dans l'intervalle de temps t.

Le second écart moyen a pour expression

$$\int_0^{\infty} c\,\frac{\partial}{\partial c}(1 + 2\,\mathrm{P}_{c,c})\,dc$$

ou

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\int_0^{\infty}\left[c\,e^{-\frac{c^2}{\varphi(t)}} - 3c\,e^{-\frac{(3c)^2}{\varphi(t)}} + 5c\,e^{-\frac{(5c)^2}{\varphi(t)}} - \ldots\right]dc.$$

L'intégrale se décompose en une somme d'intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty}\frac{4\alpha c\,e^{-\frac{(\alpha c)^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\,dc = \frac{2\sqrt{\varphi(t)}}{\alpha\sqrt{\pi}};$$

elle a donc pour valeur

$$\frac{2\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Du développement connu

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

on déduit, en posant $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Le second écart moyen a donc pour valeur

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\varphi(t)} = \pi a;$$

il est proportionnel à la racine carrée de la fonction d'instabilité et égal au premier écart moyen multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

483. On pourrait imaginer de nouvelles sortes de prime : moyennant l'abandon d'une certaine prime, on toucherait le plus grand écart entre le cours actuel et les cours cotés dans l'intervalle de temps t, que cet écart soit positif ou négatif.

La valeur de la prime, d'après le résultat du paragraphe précédent, devrait être πa.

Nous avons vu (n° 476) que la promesse de toucher la différence entre le plus haut et le plus bas cours cotés pendant le temps t, c'est-à-dire la promesse de toucher la somme des deux plus grands écarts dans chaque sens, avait pour valeur $4a$. La promesse de toucher le plus grand des deux écarts valant πa, la promesse de toucher le plus petit vaudrait $(4-\pi)a$, un peu moins que la prime simple.

484. **Second écart probable.** — Nous appellerons *second écart probable* l'intervalle $\pm\gamma$ tel que, pendant le temps t, le cours ait autant de chances de rester compris dans cet intervalle qu'il a de chances de le dépasser.

On doit avoir $P_{\gamma,\gamma} = \frac{1}{2}$, d'où

$$\gamma = 2,9a = 0,8062\ldots\sqrt{\varphi(t)}.$$

Le second écart probable est proportionnel à la racine carrée de la fonction d'instabilité ; il est égal au premier écart probable multiplié par 1,7....

On comprend la différence qui existe entre les deux écarts probables : le premier a des chances égales d'être ou de ne pas être dépassé à l'époque t, tandis que le second a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassé avant l'époque t.

Si l'on suppose l'uniformité, le second écart probable est proportionnel à la racine carrée du temps ; il a pour valeur $2,9k\sqrt{t}$.

Les résultats auxquels nous ont conduit les notions des seconds écarts isoprobables et des écarts principaux (n°s 387 et 388) sont évidemment applicables au cas considéré ; il suffit de remplacer m par c et $\varphi(\mu)$ par $\varphi(t)$.

485. **Époque la plus probable.** — Nous venons d'étudier des

problèmes dans lesquels nous avons considéré un intervalle de temps fixe et des écarts variables; nous allons maintenant supposer les écarts fixes et la durée de l'opération variable.

L'époque *la plus probable* à laquelle le cours sortira de l'intervalle (c, b) en cotant le cours c sera donnée par la formule

$$\frac{\partial^2 P_{c,b}}{\partial t^2} = 0.$$

L'époque la plus probable à laquelle le cours atteindra la limite $-b$ s'obtiendra en résolvant l'équation

$$\frac{\partial^2 P_{b,c}}{\partial t^2} = 0.$$

L'époque la plus probable à laquelle le cours sortira de l'intervalle (c, b) est donnée par l'égalité

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{c,b} + P_{b,c}) = 0.$$

Supposons que $c = k\sqrt{t_1}$, $b = 2c = 2k\sqrt{t_1}$. En résolvant les équations ci-dessus, on voit que l'époque la plus probable à laquelle le cours atteindra la limite c est environ le $\frac{1}{6}$ de t_1. L'époque la plus probable à laquelle le cours b sera dépassé est $\frac{2}{3}t_1$. Enfin, l'époque la plus probable à laquelle l'intervalle (c, b) sera dépassé est égale aux $\frac{2}{}$ de t_1.

486. **Époque probable.** — L'*époque probable* à laquelle le cours sort de l'intervalle c, $-b$ s'obtient par la résolution de l'équation

$$P_{c,b} + P_{b,c} = \frac{1}{2}.$$

Supposons d'abord que $b = c$; on devra avoir, en supposant l'uniformité,

$$t = \frac{c^2}{8,24\,k^2}.$$

Si, par exemple, $c = a = k\sqrt{t_1}$, on aura $t = \frac{t_1}{8,24}$; si $c = 2a = 2k\sqrt{t_1}$, on aura $t = \frac{t_1}{2,06}$.

Supposons maintenant que $b = 2c$; l'époque probable correspond à

$$t = \frac{c^2}{4,6k^2} = \frac{bc}{9,2k^2}.$$

Si, par exemple, $c = a = k\sqrt{t_1}$, $b = 2k\sqrt{t_1}$, on aura

$$t = \frac{t_1}{4,6}.$$

487. **Époque moyenne.** — Le cours pouvant sortir de l'intervalle $+c$, $-b$ à toutes les époques entre zéro et l'infini, l'*époque moyenne* correspondant à cet intervalle est la somme des produits des probabilités pour que le cours sorte de l'intervalle à l'époque t par la durée t elle-même.

Nous allons chercher l'époque moyenne à laquelle le cours sort de l'intervalle $+c$, $-b$.

En supposant l'uniformité, l'époque moyenne quand le cours est x ne dépend que de x et peut se représenter par $f(x)$. $(c > x > -b)$. Pendant le temps très petit Δt, le cours peut varier de la quantité u; la probabilité pour qu'il en soit ainsi est

$$\frac{e^{-\frac{u^2}{4\pi k^2 \Delta t}}}{2\pi k\sqrt{\Delta t}}\,du.$$

Au bout du temps Δt, $f(x)$ est devenu dans cette hypothèse $f(x+u)$.

Cela posé, on peut écrire

$$(1) \qquad f(x) = \Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{4\pi k^2 \Delta t}}}{2\pi k\sqrt{\Delta t}}\, f(x+u)\,du;$$

en effet, la durée moyenne $f(x)$ se compose d'abord de l'élément de temps Δt, et au bout de ce temps elle est devenue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{4\pi k^2 \Delta t}}}{2\pi k\sqrt{\Delta t}}\, f(x+u)\,du.$$

L'équation qui précède n'est donc que la traduction des principes des probabilités composées et totales.

La quantité u ne peut varier en réalité que de $-(x+b)$ à $c-x$; mais, comme Δt est supposé infiniment petit, les variations de u sont aussi petites qu'on veut et l'intégrale peut être prise entre des limites infinies.

Développons $f(x+u)$ par la formule de Taylor; on a

$$f(x+u) = f(x) + u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots.$$

Substituant cette valeur de $f(x+u)$ dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{4\pi k^2 \Delta t}}}{2\pi k\sqrt{\Delta t}} f(x+u)\,du,$$

celle-ci se réduit à

$$f + \pi k^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 6\pi^2 k^4 (\Delta t)^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \ldots$$

et, comme Δt est infiniment petit, l'équation (1) devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{\pi k^2},$$

d'où

$$f(x) = -\frac{x^2}{2\pi k^2} + mx + n,$$

m et n étant des constantes qu'on détermine par les conditions $f(c) = 0$ et $f(-b) = 0$; on obtient ainsi

$$m = \frac{c-b}{2\pi k^2}, \qquad n = \frac{cb}{2\pi k^2},$$

d'où

$$f(x) = -\frac{x^2}{2\pi k^2} + \frac{c-b}{2\pi k^2}x + \frac{cb}{2\pi k^2}.$$

La durée moyenne cherchée est $f(0)$, c'est-à-dire

$$\frac{cb}{2\pi k^2}.$$

488. Reprenons à titre d'exemple le problème suivant :

On achète de la rente avec l'intention de la revendre avec le bénéfice

$a = k\sqrt{t}$ ou avec la perte $2a$; on termine l'opération si, à l'époque t, la revente n'a pu avoir lieu. Quels sont les principaux résultats que fournit le calcul des probabilités sur cette opération?

La probabilité de revente avec le bénéfice a est 0,652.

La probabilité de revente avec la perte $2a$ est 0,325.

La probabilité pour que la revente n'ait pas lieu avant l'époque t est 0,023.

L'époque la plus probable de la revente avec le bénéfice a est $\frac{t}{6}$.

L'époque la plus probable de la revente avec la perte $2a$ est $\frac{2}{3}t$.

L'époque probable de la revente est $\frac{t}{1,6}$.

L'époque moyenne est $\frac{t}{\pi}$.

489. **Distribution des probabilités.** — Il nous reste à achever la résolution du problème de la distribution des probabilités, c'est-à-dire à chercher la probabilité pour que le cours soit x à l'époque t, les variations antérieures n'ayant jamais dépassé l'intervalle $-b$, $+c$.

En se basant, comme nous l'avons fait précédemment, sur de simples raisons de symétrie, on obtient, pour expressions de cette probabilité, la formule suivante :

$$\varpi_x - \varpi_{2c-x} + \varpi_{2c+2b-x} - \varpi_{4c+2b-x} + \dots$$
$$- \varpi_{2b+x} + \varpi_{2b+2c+x} - \varpi_{4b+2c+x} + \dots,$$

où l'on a posé

$$\varpi_z = \frac{e^{-\frac{z^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\,dz.$$

490. **Opérations au comptant.** — Les opérations au comptant sont essentiellement différentes des opérations à terme; pour les premières, l'espérance mathématique de l'acheteur n'est pas nulle, elle est égale à l'intérêt du capital qui a été versé pour acheter le titre.

Supposons qu'il s'agisse de la rente 3 pour 100 : tous les trois mois il est détaché un coupon de $0^{\text{fr}},75$, et tout se passe comme si le cours de la rente au comptant montait en moyenne de 3^{fr} par an ou de $0^{\text{fr}},25$ par mois.

L'espérance mathématique de l'acheteur de rente au comptant est $0^{\text{fr}},25$ par mois, 3^{fr} par an, etc.

(Le cours du comptant est généralement différent de celui du terme. A terme, l'acheteur touche également les coupons, mais il paie les reports, de sorte qu'il y a pour lui compensation en général. Je n'ai pas à étudier ici ces questions; elles ont été développées dans mon Ouvrage sur la *Théorie de la spéculation*.)

La probabilité pour que, à l'époque t, le cours de la rente au comptant soit x (le cours actuel étant zéro), ou encore la probabilité pour que l'acheteur au comptant puisse réaliser un bénéfice x au bout du temps t, est exprimée par la formule du paragraphe 419.

Cette probabilité est

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{[\psi(t)+x]^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}\,dx.$$

L'espérance mathématique $\psi(t)$ est connue; si, par exemple, t est exprimé en jours et si l'unité adoptée pour x est le centime, on a

$$\psi(t) = \frac{300}{365}\,t,$$

car l'espérance mathématique est 300 centimes pour 365 jours.

Il y a nécessairement uniformité relativement à l'espérance mathématique; nous supposerons qu'il y ait également uniformité relativement à l'instabilité (nº 432); la probabilité du cours x à l'époque t sera alors exprimée par la formule

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{\left(\frac{300}{365}t+x\right)^2}{4\pi k^2 t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{4\pi k^2 t}}\,dx.$$

Le coefficient d'instabilite k varie sans cesse; il peut être calculé à chaque instant, comme nous l'avons vu, s'il est traité des primes. Il a même valeur qu'il s'agisse d'opérations au comptant ou d'opérations à terme.

En adoptant pour le coefficient k sa valeur moyenne calculée dans mon Traité sur la *Théorie de la spéculation* ($k = 5$, l'unité de temps

étant le jour et l'unité de variation le centime), on peut obtenir facilement les probabilités relatives à une époque t quelconque.

On voit ainsi que neuf fois sur dix un achat de rente au comptant produit un bénéfice au bout d'un an.

491. La probabilité P pour que le cours x soit dépassé avant l'époque t (probabilité du second genre) est exprimée par la formule du paragraphe 346 dans laquelle on remplace μ par t et ψ_1 par $-\psi_1$. On a ainsi

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x - t\psi_1}{\sqrt{t\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{4x\psi_1}{\varphi_1}} \int_{\frac{x + t\psi_1}{\sqrt{t\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda;$$

ψ_1 est égal à $\frac{300}{365}$ et φ_1 à $4\pi k^2$.

Supposons, par exemple, qu'on achète de la rente au comptant pour la revendre avec un bénéfice de 3fr. Si l'on adopte la valeur moyenne $k = 5$, il y a probabilité 0,64 pour que la vente puisse s'effectuer avant un an.

La même probabilité serait 0,18 pour six mois, 0,49 pour neuf mois et 0,82 pour dix-huit mois.

L'époque probable de la vente, c'est-à-dire la durée probable de l'opération, est neuf mois; la durée moyenne est un an.

CHAPITRE XVI.

THÉORIE DU RAYONNEMENT DE LA PROBABILITÉ.

492. Soit $\varpi_{t,x,\ldots}\,dx$ la probabilité pour que, à l'époque t, le cours soit compris entre x et $x+dx$. Soit encore $\zeta(u, x, t, \ldots)du$ la probabilité pour que le cours augmente de la quantité u pendant l'intervalle de temps t, $t+dt$ quand on sait que le cours était x à l'époque t.

La probabilité pour que le cours soit $x+u$ à l'époque $t+dt$ ayant été x à l'époque t est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\varpi_{t,x,\ldots}\,\zeta(u, x, t, \ldots)\,dx\,du.$$

Nous pouvons exprimer ce fait en disant que le cours x a, pendant le temps dt, émis vers le cours $x+u$ la quantité de probabilité $\varpi_{t,x}\ldots\zeta(u, x, t, \ldots)\,dx\,du$.

Le même raisonnement peut s'appliquer à tous les cours tels que $x+u$ possibles à l'époque $t+dt$ quand le cours a été x à l'époque t. Nous pouvons donc dire que pendant le temps dt le cours x (ou le point x si l'on représente les cours par une droite) diffuse sa probabilité vers les points voisins.

493. Quand les lois de cette diffusion sont simples, c'est-à-dire quand les lois des variations de $\zeta(u, x, t, \ldots)$ sont simples elles-mêmes, il est possible d'en déduire la probabilité pour que le cours soit x à l'époque t, problème qui constitue le but de notre étude.

Lorsqu'on suppose que $\zeta(u, x, t, \ldots)$ dépend seulement de u et de t, on dit qu'il y a *indépendance*, pour exprimer que ζ est indépendant de x et des variations antérieures à l'époque t.

Lorsque ζ ne dépend pas du temps, on dit qu'il y a *uniformité*.

Dans la suite de cette étude, nous supposerons toujours l'indépendance et parfois l'uniformité.

La probabilité pour que le cours soit x à l'époque t et $x+u$ à l'époque $t+dt$ est

$$\varpi_{t,x}\,\zeta(u,t)\,du\,dx.$$

Nous exprimerons ce fait en disant que le cours x a émis vers le point voisin $x+u$ la quantité de probabilité $\varpi_{t,x}\,\zeta(u,t)\,du\,dx$ proportionnelle à la probabilité du cours x.

S'il y a indépendance et uniformité, la fonction ζ ne dépend que de u et alors le point x émet vers le point voisin $x+u$ une quantité de probabilité égale au produit de la probabilité du point x par une fonction de u.

494. Le point x émet vers le point $x+u$ pendant le temps dt la quantité de probabilité

$$\varpi_{t,x}\,\zeta(u)\,du.$$

Le point $x+u$ émet vers le point x pendant le même temps dt la quantité de probabilité

$$\varpi_{t,x+u}\,\zeta(-u)\,du.$$

S'il y a symétrie, $\zeta(u)=\zeta(-u)$ et la probabilité qui passe d'un cours à l'autre est

$$(\varpi_{t,x}-\varpi_{t,x+u})\,\zeta(u)\,du.$$

Par analogie avec certaines théories physiques nous exprimerons ce fait comme suit :

Un cours rayonne vers un cours voisin une quantité de probabilité proportionnelle à la différence de leurs probabilités.

Telle est la loi du rayonnement de la probabilité.

495. La probabilité passe d'un point plus probable à un autre qui l'est moins comme la chaleur passe d'un corps chaud à un corps froid.

Les probabilités tendent constamment à s'égaliser. Il résulte de ce fait et de la symétrie que le point $x=0$ qui était le plus probable au début reste constamment le plus probable et que la probabilité d'un point x diminue avec x.

Il en résulte aussi que, t croissant indéfiniment, la probabilité dans

un intervalle fini x, x_1 tendra vers zéro. Toutes les probabilités en effet deviendront égales; elles s'étendront sur une distance infinie, et, comme leur somme est finie, chacune d'elles sera nulle.

Ces propriétés subsisteraient même si la fonction ζ dépendait de t. Il y aurait exception si ζ tendait vers zéro quand t croît indéfiniment; mais la nature du problème que nous traitons ne permet pas, de faire cette hypothèse.

496. **Probabilité totale.** — Nous désignerons par $\mathfrak{P}_{t,x}$ la probabilité pour que le cours se trouve compris, à l'époque t, entre x et l'infini; on a donc

$$\mathfrak{P}_{t,x} = \int_x^{\infty} \varpi_{t,x}\,dx,$$

et de même

$$\varpi_{t,x} = -\frac{\partial \mathfrak{P}_{t,x}}{\partial x}.$$

Nous allons calculer la probabilité $\mathfrak{P}_{t,x}$ pour que le cours se trouve compris à l'époque t, entre x et l'infini. Dans ce but, nous déterminerons d'abord la quantité de probabilité qui, pendant le temps dt, passe de la région $-\infty$, $+x$ dans la région $+x$, $+\infty$; la quantité de probabilité qui, en quelque sorte, traverse le cours x.

Nous supposerons que pendant le temps dt il y a probabilité $\zeta(u)\,du$ pour que le cours varie de la quantité u, u ayant par exemple pour limites $-\varepsilon_1$ et $+\varepsilon_1$, de sorte que

$$\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1} \zeta(u)\,du = 1.$$

Si, à l'époque t, le cours est $x-\varepsilon$, hypothèse dont la probabilité est $\varpi_{t,x-\varepsilon}$, la probabilité pour que, à l'époque $t+dt$, il ait dépassé l'abscisse x est

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \zeta(u)\,du.$$

La probabilité pour que le cours soit $x-\varepsilon$ à l'époque t et pour qu'il ait dépassé x à l'époque $t+dt$ est, en vertu du principe des probabi-

lités composées,

$$\varpi_{t,x-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1}\zeta(u)\,du.$$

La probabilité pour que le cours soit $x+\varepsilon$ à l'époque t et pour qu'il ait rétrogradé à une abscisse moindre que x à l'époque $t+dt$ est de même

$$\varpi_{t,x+\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1}\zeta(u)\,du.$$

L'accroissement de la probabilité $\mathfrak{P}$ dans l'intervalle de temps dt, c'est-à-dire la probabilité qui passe pendant ce temps à travers l'abscisse x, est la somme des expressions telles que

$$(\varpi_{t,x-\varepsilon}-\varpi_{t,x+\varepsilon})\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1}\zeta(u)\,du,$$

pour toutes les valeurs de ε depuis zéro jusqu'à ε_1.

Développons les expressions $\varpi_{t,x-\varepsilon}$ et $\varpi_{t,x+\varepsilon}$ par la formule de Taylor; nous aurons

$$\varpi_{t,x-\varepsilon}=\varpi_{t,x}-\varepsilon\frac{\partial\varpi}{\partial x}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}-\frac{\varepsilon^3}{6}\frac{\partial^3\varpi}{\partial x^3}+\ldots,$$

$$\varpi_{t,x+\varepsilon}=\varpi_{t,x}+\varepsilon\frac{\partial\varpi}{\partial x}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}+\frac{\varepsilon^3}{6}\frac{\partial^3\varpi}{\partial x^3}+\ldots.$$

L'accroissement de la probabilité $\mathfrak{P}$ a pour expression

$$-\frac{\partial\varpi}{\partial x}\int_0^{\varepsilon_1}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1}2\varepsilon\,\zeta(u)\,du\,d\varepsilon-\frac{\partial^3\varpi}{\partial x^3}\int_0^{\varepsilon_1}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon^3}{3}\zeta(u)\,du\,d\varepsilon-\ldots.$$

Transformons les intégrales doubles par la formule de Dirichlet,

$$\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)\,dx=\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)\,dy;$$

nous aurons alors

$$-\frac{\partial\varpi}{\partial x}\int_0^{\varepsilon_1}du\int_0^u 2\varepsilon\,\zeta(u)\,d\varepsilon-\frac{\partial^3\varpi}{\partial x^3}\int_0^{\varepsilon_1}du\int_0^u\frac{\varepsilon^3}{3}\zeta(u)\,du-\ldots$$

ou

$$-\frac{\partial\varpi}{\partial x}\int_0^{\varepsilon_1}u^2\,\zeta(u)\,du-\frac{\partial^3\varpi}{\partial x^3}\int_0^{\varepsilon_1}\frac{u^4}{12}\zeta(u)\,du-\ldots.$$

La première intégrale représente la moitié de la valeur moyenne de u^2 dans l'intervalle de temps dt; la seconde intégrale représente le sixième de la valeur moyenne de u^4 dans le même intervalle, etc.

La valeur moyenne de u^4 est infiniment petite par rapport à celle de u^2, puisque dt est infiniment petit; l'expression précédente se réduit donc rigoureusement à

$$-\frac{\partial\varpi}{\partial x}\int_0^{\varepsilon_1} u^2\zeta(u)\,du.$$

Nous désignerons par φ_1 le double de la valeur moyenne de u^2 et nous nommerons φ_1 la *fonction d'instabilité* relative à l'intervalle dt.

L'expression précédente qui exprime l'accroissement de la probabilité $\mathfrak{P}$ dans l'intervalle dt peut donc s'écrire

$$-\frac{\varphi_1}{4}\frac{\partial\varpi}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\varphi_1}{4}\frac{\partial^2\mathfrak{P}}{\partial x^2};$$

cet accroissement s'exprime aussi par $\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}$; on a donc

$$\frac{\partial^2\mathfrak{P}}{\partial x^2}-\frac{4}{\varphi_1}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}=0.$$

La probabilité $\mathfrak{P}$ vérifie donc l'équation de Fourier.

497. Cette équation a pour intégrale

$$\mathfrak{P}=\int_0^\infty f\left(t-\frac{2x^2}{\varphi_1\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha.$$

La fonction arbitraire f se détermine par les considérations suivantes :

On doit avoir $\mathfrak{P}=\frac{1}{2}$ si $x=0$, t ayant une valeur positive quelconque, et $\mathfrak{P}=0$ lorsque t est négatif.

En posant $x=0$ dans l'intégrale ci-dessus, on a

$$\mathfrak{P}=f(t)\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(t).$$

c'est-à-dire

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \qquad \text{pour } t > 0,$$
$$f(t) = 0 \qquad \text{pour } t < 0;$$

cette dernière égalité nous montre que l'intégrale $\mathfrak{P}$ aura ses éléments nuls tant que $t - \frac{2x^2}{\varphi_1 \alpha^2}$ sera plus petit que zéro, c'est-à-dire tant que α sera plus petit que $\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\varphi_1}\sqrt{t}}$; on doit donc prendre pour limite inférieure dans l'intégrale $\mathfrak{P}$ la quantité $\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\varphi_1}\sqrt{t}}$, et l'on a

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\varphi_1}\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

ou, en remplaçant $\int_{\frac{x}{\sqrt{t\varphi_1}}}^{\infty}$ par $\int_0^{\infty} - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t\varphi_1}}}$,

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t\varphi_1}}} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Telle est l'expression de la probabilité totale entre x et l'infini.

498. **Probabilité élémentaire.** — La probabilité $\varpi_{x,t}$ pour que, à l'époque t, le cours soit x s'obtient par la formule

$$\varpi = -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x};$$

on a donc

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{x^2}{t\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{t\varphi_1}}.$$

On constate facilement que cette expression de ϖ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} - \frac{4}{\varphi_1}\,\frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0.$$

On sait que, plus généralement, si une fonction $\mathfrak{P}$ satisfait à l'équation de Fourier, sa dérivée en x y satisfait également.

Il est facile de parvenir directement à l'équation précédente.

Cherchons pour cela l'accroissement de ϖ dans le temps dt.

Si le cours est $x - \varepsilon$ à l'époque t, il rayonne pendant le temps dt vers le point x la quantité de probabilité

$$(\varpi_{x-\varepsilon} - \varpi_x)\,\zeta(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Si le cours est $x + \varepsilon$ à l'époque t, le point x rayonne vers lui la quantité de probabilité

$$(\varpi_x - \varpi_{x+\varepsilon})\,\zeta(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

relativement aux points $x + \varepsilon$ et $x - \varepsilon$; la probabilité du point x s'accroît donc de

$$[(\varpi_{x-\varepsilon} - \varpi_x) - (\varpi_x - \varpi_{x+\varepsilon})]\,\zeta(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

et l'accroissement total de la probabilité du point x est la somme de toutes les quantités analogues pour toutes les valeurs de ε de zéro à ε_1. Cet accroissement est donc

$$\int_0^{\varepsilon_1} [(\varpi_{x-\varepsilon} - \varpi_x) - (\varpi_x - \varpi_{x+\varepsilon})]\,\zeta(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

ou, en développant $\varpi_{x-\varepsilon}$ et $\varpi_{x+\varepsilon}$ par la formule de Taylor,

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}\int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon^2\,\zeta(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\partial^4\varpi}{\partial x^4}\int_0^{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon^4}{12}\,\zeta(\varepsilon)\,d\varepsilon + \ldots.$$

La première intégrale est la moitié de la valeur moyenne de ε^2 dans l'intervalle de temps dt; la seconde intégrale est le sixième de la valeur moyenne de ε^4 dans le même intervalle, etc.

La valeur moyenne de ε^4 est infiniment petite relativement à celle de ε^2, puisque dt est infiniment petit; l'expression précédente se réduit donc rigoureusement à

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}\int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon^2\,\zeta(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Le double de la valeur moyenne de ε^2 se désigne par φ_1 et se nomme *fonction d'instabilité* relative à dt.

L'accroissement considéré est donc

$$\frac{\varphi_1}{4}\,\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2};$$

comme il a aussi pour expression $\frac{\partial\varpi}{\partial t}$, on a

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2} - \frac{4}{\varphi_1}\frac{\partial\varpi}{\partial t} = 0.$$

499. L'équation fonctionnelle du paragraphe 418 aurait conduit à cette même équation en admettant le principe de l'espérance mathématique et le principe de l'uniformité.

En admettant ce dernier principe, l'équation fonctionnelle s'écrit

$$\varpi_{t,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{t_1,z} \times \varpi_{t-t_1,x-z}\, dz.$$

Cette équation détermine ϖ, parce que t et t_1 sont absolument quelconques et, en particulier, parce que l'on peut considérer $t - t_1$ comme infinitésimal.

Posons $t - t_1 = \Delta t$ et $x - z = \varepsilon$; l'équation devient

$$\varpi_{t,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{t-\Delta t,x-\varepsilon} \times \varpi_{\Delta t,\varepsilon}\, d\varepsilon.$$

Développons l'élément de l'intégrale en supposant Δt infiniment petit; les puissances de ε supérieures à la seconde peuvent être rigoureusement négligées, et l'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned}\varpi_{t,x} = \varpi_{t,x}\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{\Delta t,\varepsilon}\, d\varepsilon &- \frac{\partial\varpi_{t,x}}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\varpi_{\Delta t,\varepsilon}\, d\varepsilon \\ &- \Delta t\frac{\partial\varpi_{t,x}}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{\Delta t,\varepsilon}\, d\varepsilon + \frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{2}\varpi_{\Delta t,\varepsilon}\, d\varepsilon.\end{aligned}$$

La première et la troisième intégrale ont pour valeur un; la seconde est nulle en vertu du principe de l'espérance mathématique.

Il reste alors

$$0 = -\Delta t\frac{\partial\varpi}{\partial t} + \frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{2}\varpi_{\varepsilon,\Delta t}\, d\varepsilon.$$

Si l'on désigne par $\varphi_1\Delta t$ le double de la valeur moyenne de ε^2 pendant le temps Δt, on a simplement

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2} - \frac{4}{\varphi_1}\frac{\partial\varpi}{\partial t} = 0.$$

La première méthode que nous avons employée conduit donc à la même équation aux dérivées partielles que la théorie du rayonnement.

500. Dans l'expression des probabilités, on peut introduire le coefficient k au lieu de φ_1; la probabilité ϖ ayant pour valeur

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{x^2}{t\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{t\varphi_1}},$$

l'espérance positive est $\frac{\sqrt{\varphi_1}\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}}$, et si l'on désigne par k le coefficient d'instabilité, c'est-à-dire l'espérance positive lorsque $t = 1$, on a

$$\varphi_1 = 4\pi k^2.$$

501. **Cas où il n'y a pas uniformité.** — Dans le cas où il n'y a pas uniformité, les raisonnements dont nous avons fait usage (nº 498) subsistent toujours, mais la fonction ζ diffère suivant l'intervalle dt considéré; c'est une fonction du temps. L'équation aux dérivées partielles est alors remplacée par la suivante,

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} - \frac{4}{\varphi'(t)} \frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0;$$

$\varphi'(t)$ est une fonction donnée du temps; c'est la quantité

$$2\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1} \varepsilon^2 \zeta(\varepsilon, t)\, d\varepsilon.$$

ε_1 est une fonction donnée du temps.

On peut toujours supposer que ε_1 est infini en changeant convenablement la forme de l'élément de l'intégrale, ce qui importe peu, puisque la fonction ζ est arbitraire. Par exemple, on peut multiplier l'élément par un facteur égal à un entre les limites $-\varepsilon_1$ et $+\varepsilon_1$ et égal à zéro en dehors de ces limites.

Pour intégrer l'équation, on pose

$$r = \frac{\varphi(t)}{\varphi_1};$$

elle devient alors

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} - \frac{4}{\varphi_1} \frac{\partial \varpi}{\partial r} = 0;$$

cette dernière a pour intégrale

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{x^2}{r\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{r\varphi_1}};$$

la proposée a donc pour intégrale

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}};$$

$\varphi(t)$ est la *fonction d'instabilité* relative au temps t.

502. Dans le cas général où il n'existe ni symétrie ni uniformité, on est conduit par les méthodes précédentes à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{4\psi'(t)}{\varphi'(t)}\frac{\partial \varpi}{\partial x} - \frac{4}{\varphi'(t)}\frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0;$$

$\psi'(t)$ est une fonction donnée du temps; c'est la quantité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon.\zeta(\varepsilon.\,t)\,d\varepsilon;$$

ζ est une fonction donnée de t et de ε.

$\psi'(t)$ est l'*espérance mathémathique* relative à l'intervalle élémentaire t, $t+dt$.

$\varphi'(t)$ est également une fonction donnée du temps; c'est la quantité

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2\zeta(\varepsilon.\,t)\,d\varepsilon - 2\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\,\zeta(\varepsilon.\,t)\,d\varepsilon\right]^2.$$

$\varphi'(t)$ est la *fonction d'instabilité* relative à l'intervalle élémentaire t, $t+dt$.

Si dans l'équation précédente on pose

$$x = z - \psi(t), \qquad r = \frac{\varphi(t)}{\varphi_1},$$

elle se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2} - \frac{4}{\varphi_1}\frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0.$$

Cette dernière a, comme on sait, pour intégrale

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{z^2}{r\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{r\varphi_1}};$$

la proposée a donc pour intégrale

$$\varpi = \frac{e^{-\frac{[x+\psi(t)]^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}.$$

503. Applications à la Physique mathématique. — Les résultats que nous avons obtenus par les principes du calcul des probabilités sont susceptibles d'applications à certaines théories de la Physique mathématique et notamment à la théorie analytique de la chaleur.

Considérons par exemple la formule qui exprime la probabilité ϖ de la perte x en μ parties dans un jeu uniforme défini par la fonction d'instabilité φ_1 et par l'espérance ψ_1 :

(1) $$\varpi = \frac{e^{-\frac{(x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}.$$

Cette probabilité ϖ vérifie l'équation aux dérivées partielles

(2) $$\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2} + \frac{4\psi_1}{\varphi_1}\frac{\partial\varpi}{\partial x} - \frac{4}{\varphi_1}\frac{\partial\varpi}{\partial\mu} = 0$$

et la condition relative à l'état initial

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \varpi\, dx = 1 \qquad \text{pour } \mu = 0.$$

quelque petites que soient les quantités positives α et β.

Considérons maintenant le problème de la distribution des températures dans un courant liquide infiniment mince ou supposé tel que les filets soient parallèles et animés de la même vitesse. La distribution des températures est régie par l'équation aux dérivées partielles

(3) $$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{4u}{k}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{4}{k}\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0;$$

θ est la température, x est la distance du point considéré à une origine fixe comptée en suivant le sens du courant, u est la vitesse du courant que nous supposons constante, $\frac{k}{4}$ est le coefficient de conductibilité du liquide, t désigne le temps.

Lorsque $u = 0$, l'équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{4}{k}\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.$$

C'est l'équation de Fourier relative à un espace à une dimension.

L'équation (3) est analogue à l'équation (2) et s'en déduit en remplaçant φ_1 par k, ψ_1 par $-u$ et μ par t.

Il en résulte que les solutions de l'équation (2) font connaître les solutions de l'équation (3).

Étudions d'abord le cas le plus simple, celui d'un courant indéfini. Nous supposons qu'au point pris pour origine se produit une source instantanée de chaleur. Cela signifie que, la température du courant étant initialement zéro, le point origine se trouve en un temps très court dt porté à la température C. A partir de cet instant, aucune quantité de chaleur n'est plus introduite dans le courant, de sorte que l'excès de chaleur du point origine se diffuse par suite de la conductibilité.

Il s'agit de déterminer la distribution des températures à l'époque t.

La température θ doit vérifier l'équation indéfinie (3) et la condition relative à l'état initial

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \theta\, dx = 1 \qquad \text{pour } t = 0,$$

quelque petites que soient les quantités positives α et β.

L'équation indéfinie et la condition relative à l'état initial sont analogues à celles qui régissent la probabilité du premier genre ϖ; on en déduit

$$\theta = \frac{C e^{-\frac{(x-ut)^2}{kt}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{kt}}.$$

Telle est l'expression de la température du point x à l'époque t; elle vérifie bien les conditions qui lui sont imposées.

Les conséquences qu'on déduit de cette formule sont identiques à celles qu'on déduit de la formule du calcul des probabilités.

Par exemple, le principe de la conservation de la quantité totale de chaleur

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta \, dx = C$$

est évident dans le cas actuel comme dans le cas des probabilités.

La distribution des températures est donnée par une courbe du hasard qui, en même temps qu'elle se déforme suivant les lois connues, est entraîné par le courant.

Si la source instantanée de chaleur au lieu d'être à l'origine est en y et si sa température est $F(y)$, la distribution des températures à l'époque t est donnée par la formule

$$\theta = \frac{F(y) e^{-\frac{(x-y-nt)^2}{kt}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{kt}}.$$

Pour résoudre d'une façon générale le problème des températures dans un courant indéfini, il faut supposer qu'à l'époque $t = 0$ il existe des sources de chaleur en nombre fini ou infini ayant des températures données. Si l'on désigne par $F(y)$ la température initiale du point y, la température du point x à l'époque t est donnée par la formule

$$\theta = \Sigma F(y) \frac{e^{-\frac{(x-y-nt)^2}{kt}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{kt}},$$

qui exprime la solution générale cherchée.

504. Nous allons étudier le cas, beaucoup plus difficile, où le courant est limité dans les deux sens.

Nous supposerons que en $x = -n$ se trouve un réservoir indéfini maintenu à la température zéro; en $x = m$ se trouve un second réservoir indéfini dont la température est constamment zéro. La température du courant est initialement nulle. A l'origine, c'est-à-dire en $x = 0$, agit pendant le temps dt une source instantanée de chaleur élevant la température de ce point à la valeur C. La chaleur se diffusant ensuite

par l'effet de la conductibilité, il faut déterminer la température du point x à l'époque t.

La température θ doit vérifier l'équation indéfinie (3), la condition relative à l'état initial et les conditions aux limites.

On doit avoir, comme précédemment,

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \theta\, dx = C \quad \text{pour } t = 0,$$

quelque petites que soient les quantités positives α et β.

On doit aussi avoir

$$\theta = 0 \text{ pour } x = m, \ t \text{ étant quelconque},$$
$$\theta = 0 \text{ pour } x = -n, \ t \text{ étant quelconque}.$$

Lorsque le courant est indéfini, le problème de la distribution des températures est analogue à celui qui consiste à déterminer la probabilité de la perte d'un joueur qui possède une fortune infinie; le problème dont nous nous occupons est donc analogue à celui de la perte d'un joueur, quand cette perte est limitée dans les deux sens.

Pour préciser davantage, le problème analogue à celui qui nous est proposé consiste à chercher la probabilité pour qu'un joueur perde en totalité la somme x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie lorsqu'il possède la fortune m, son adversaire possédant la fortune n.

Ce problème a été résolu au paragraphe 413, et nous en déduisons la solution du problème proposé : A l'époque t, la température θ du point x est

$$\frac{C}{\sqrt{\pi}\sqrt{kt}} \left\{ \begin{aligned} & e^{-\frac{(x-ut)^2}{kt}} - e^{-\frac{4u}{k}(m-x)} e^{-\frac{(2m-x-ut)^2}{kt}} \\ & + e^{-\frac{4u}{k}(m+n-x)} e^{-\frac{(2m+2n-x-ut)^2}{kt}} \\ & - e^{-\frac{4u}{k}(2m+n-x)} e^{-\frac{(4m+2n-x-ut)^2}{kt}} + \dots \\ & - e^{-\frac{4u}{k}(n+x)} e^{-\frac{(2n+x+ut)^2}{kt}} \\ & + e^{\frac{4u}{k}(n+m+x)} e^{-\frac{(2n+2m+x+ut)^2}{kt}} \\ & - e^{\frac{4u}{k}(2n+m+x)} e^{-\frac{(4n+2m+x+ut)^2}{kt}} + \dots \end{aligned} \right\}.$$

505. Il est intéressant de calculer le débit élémentaire de chaleur du point m, c'est-à-dire la quantité de chaleur qui sort du courant par le point m dans l'intervalle de temps t, $t+dt$.

Il suffit de raisonner par analogie et de remarquer que si l'on assimile la probabilité à une sorte de fluide, les probabilités du second et du troisième genre sont des débits de probabilité. Le débit élémentaire qu'il s'agit de déterminer est donc analogue à la probabilité élémentaire du troisième genre. Cette analogie nous conduit à l'expression

$$\begin{aligned}\frac{C\,dt}{\sqrt{\pi}\,t\sqrt{kt}}\Bigg\{ & m e^{-\frac{(m-ut)^2}{kt}} - (m+2n) e^{-\frac{4un}{k}} e^{-\frac{(m+2n-ut)^2}{kt}} \\ & + (3m+2n) e^{-\frac{4u}{k}(m+2n)} e^{-\frac{(3m+2n-ut)^2}{kt}} \\ & - (3m+4n) e^{-\frac{4u}{k}(m+2n)} e^{-\frac{(3m+4n-ut)^2}{kt}} + \ldots \Bigg\}.\end{aligned}$$

qui est nécessairement exacte. On peut d'ailleurs l'obtenir en remarquant qu'elle doit avoir pour valeur $-\frac{k}{4}\frac{\partial\theta}{\partial x}$ pour $x=m$.

506. Le débit total en m s'obtient en intégrant l'expression précédente entre zéro et t, ce débit a donc pour valeur

$$\frac{C}{\sqrt{\pi}}\left\{ f(m) - e^{-\frac{4un}{k}} f(m+2n) + e^{-\frac{4u(n+m)}{k}} f(3m+2n) - \ldots \right\},$$

$f(z)$ représentant la fonction

$$\int_{\frac{z-ut}{\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + e^{\frac{4uz}{k}} \int_{\frac{z+ut}{\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

qui se calcule facilement par les tables de la fonction Θ.

507. Supposons que t croisse indéfiniment et que u soit négatif, la quantité totale de chaleur qui sort par le point m est

$$\frac{C e^{\frac{4mu}{k}}\left(e^{\frac{4nu}{k}} - 1\right)}{e^{\frac{4(m+n)u}{k}} - 1},$$

et celle qui sort par le point $-n$ est

$$\frac{C\left(e^{\frac{2mn}{k}}-1\right)}{e^{\frac{2(m+n)n}{k}}-1}.$$

Si, au lieu d'une source C à l'origine, il y a une source d'intensité $F(y)$ au point y, on doit, dans les formules, remplacer x par $x-y$ et C par $F(y)$. Enfin, s'il y a plusieurs sources en différents points y, on obtient la solution des divers problèmes en sommant les formules pour toutes les valeurs de y.

508. En résumé, l'équation du mouvement de la probabilité est analogue, dans le cas le plus simple, à l'équation du mouvement de la chaleur. Cette analogie ne subsiste plus dans les questions relatives soit aux probabilités connexes, soit aux probabilités indépendantes à plusieurs variables; dans ces cas, la diffusion de la probabilité suit une loi plus complexe que celle du rayonnement particulaire.

CHAPITRE XVII.

PROBABILITÉS CONTINUES A DEUX VARIABLES.

509. L'étude des probabilités à une variable a déjà démontré que la théorie du jeu est l'expression la plus générale du calcul des probabilités ; l'étude des probabilités à plusieurs variables conduira à la même conclusion. Les problèmes généraux que nous résoudrons d'abord seront donc relatifs à la théorie générale du jeu.

Si l'on considère n joueurs A_1, A_2, ..., A_n et si l'on désigne par x_1, x_2, ..., x_n les pertes de ces joueurs, on a constamment

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0.$$

Dans la théorie des probabilités à deux variables, on s'occupe exclusivement du sort de deux joueurs A et B et l'on peut supposer qu'il existe seulement un troisième joueur C, car tous les autres joueurs peuvent être sensés associés et cette supposition ne change en rien le sort de A et de B.

Si A perd la somme x, B la somme y et C la somme z, on a évidemment

$$x + y + z = 0.$$

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Trois joueurs A, B, C, *qui possèdent chacun une fortune infinie, doivent jouer* μ *parties, quelle est la probabilité pour que le joueur* A *perde la somme* x *et le joueur* B *la somme* y ?

Nous supposerons que le jeu est uniforme, c'est-à-dire que les conditions qui le définissent sont les mêmes à chaque partie.

Le jeu sera caractérisé pour le joueur A par l'espérance totale ψ_1

relative à une partie et par la fonction d'instabilité φ_1 relative à une partie.

Pour le joueur B, le jeu sera caractérisé par les fonctions ψ_2 et φ_2 et pour le joueur C par les fonctions ψ_3 et φ_3.

Nous désignerons par $f(\mu, x, y)\,dx\,dy$ la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y ou, si l'on veut, la probabilité pour que la perte du joueur A soit comprise entre x et $x+dx$ et la perte du joueur B entre y et $y+dy$.

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y, les pertes de ces joueurs ayant été x_1, y_1 à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$f(\mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu-\mu_1, x-x_1, y-y_1)\,dx_1\,dy_1.$$

Les pertes x_1, y_1 ayant pu, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, avoir toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, la probabilité pour que à la $\mu^{\text{ième}}$ partie le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu-\mu_1, x-x_1, y-y_1)\,dx_1\,dy_1.$$

Cette même probabilité s'exprime par $f(\mu, x, y)$; on doit donc avoir

$$f(\mu, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_1, x_1, y_1) f(\mu-\mu_1, x-x_1, y-y_1)\,dx_1\,dy_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f, elle doit être vérifiée quels que soient μ_1 et μ.

Il faut joindre à cette équation la condition relative à l'état initial : La probabilité pour que x soit compris entre $-\alpha_1$ et α_2 et y entre $-\beta_1$ et β_2 doit tendre vers un lorsque μ tend vers zéro, quelque petites que soient les quantités positives (et fixes) α_1, α_2, β_1, β_2; on doit donc avoir

$$\text{limite} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{-\beta_1}^{\beta_2} f(\mu, x, y)\,dx\,dy = 1 \qquad \text{pour} \qquad \mu = 0.$$

Ces deux équations de condition suffisent pour déterminer la fonction f,

par suite de la continuité de la variable μ.

L'analyse qui permet d'obtenir la fonction f sera développée au Chapitre suivant; nous nous contenterons ici d'en vérifier le résultat.

510. Les équations sont satisfaites si l'on pose

$$f(\mu, x, y) = \frac{2\, e^{-\frac{4[\varphi_2(x+\mu\psi_1)^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)(x+\mu\psi_1)(y+\mu\psi_2) + \varphi_1(y+\mu\psi_2)^2]}{\mu(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)}}}{\pi\mu\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}}.$$

La vérification est assez laborieuse, mais ne présente aucune difficulté; elle est basée sur l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bxy+cy^2+gx+hy+k)}\,dx\,dy = \frac{2\pi\, e^{\frac{(2ah-gb)^2-(4ac-b^2)(4ak-g^2)}{4a(4ac-b^2)}}}{\sqrt{4ac-b^2}},$$

qui se déduit sans peine de la formule connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}.$$

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B, la somme y est

$$f(\mu, x, y) = \frac{2\, e^{-\frac{4[\varphi_2(x+\mu\psi_1)^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)(x+\mu\psi_1)(y+\mu\psi_2) + \varphi_1(y+\mu\psi_2)^2]}{\mu(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)}}}{\pi\mu\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}}\,dx\,dy.$$

511. On peut écrire cette expression sous une forme un peu plus simple en se basant sur l'identité

$$2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2 = 4\left[\varphi_1\varphi_2 - \left(\frac{\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)^2\right]$$
$$= 4\begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3}{2} \\ \frac{\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3}{2} & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

La probabilité est ainsi exprimée par la formule

$$\frac{1}{\pi\mu\sqrt{\Delta}}\, e^{-\frac{1}{\mu\Delta}[\varphi_2(x+\mu\psi_1)^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)(x+\mu\psi_1)(y+\mu\psi_2) + \varphi_1(y+\mu\psi_2)^2]}\,dx\,dy.$$

Δ désignant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3}{2} \\ \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3}{2} & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

512. **Indépendance des fonctions d'instabilité.** — La somme $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ des trois espérances est nulle. En effet, z étant la perte du joueur C, on a

$$x + y + z = 0,$$

d'où, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\text{VM}x + \text{VM}y + \text{VM}z = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\mu\psi_1 - \mu\psi_2 - \mu\psi_3 = 0.$$

La somme $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ est donc nulle. Le jeu peut être équitable pour un des joueurs, avantageux pour un second et désavantageux pour le troisième : s'il est équitable pour deux joueurs, il l'est nécessairement pour le troisième.

513. Les fonctions d'instabilité φ_1, φ_2, φ_3 dépendent des conditions du jeu, mais la seule connaissance de deux d'entre elles n'entraîne pas la connaissance de la troisième.

Supposons, par exemple, que le jeu soit équitable et que les fonctions d'instabilité φ_1 et φ_2 relatives aux joueurs A et B aient la même valeur φ_1. Dans ces conditions, φ_3 peut avoir toute valeur entre zéro et $4\varphi_1$.

La valeur limite $\varphi_3 = 0$ correspond au cas où les joueurs A et B jouent seuls entre eux, C ne jouant pas.

φ_3 peut avoir même valeur que φ_1, par exemple par la supposition que chacun des joueurs ait une chance sur trois de gagner la somme $\dfrac{\sqrt{3\varphi_1}}{2}$, une chance sur trois de perdre la même somme et une chance sur trois de faire partie nulle. Dans ces conditions, en effet, la fonction d'instabilité relative à chaque joueur est φ_1.

La valeur limite $\varphi_3 = 4\varphi_1$ serait obtenue en supposant que les joueurs

A et B ne jouent pas entre eux, le joueur C faisant la contre-partie de ces deux joueurs. En effet, soit $\zeta(u)\,du$ la probabilité pour que le joueur A perde la somme u; si A perd la somme u, B perd également la somme u et C gagne $2u$. Les fonctions d'instabilité relatives aux joueurs A et C sont donc, par définition,

$$\varphi_1 = 2\int u^2 \zeta(u)\,du \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = 2\int (2u)^2 \zeta(u)\,du = 4\varphi_1.$$

φ_3 peut donc prendre toute valeur entre zéro et $4\varphi_1$.

Un cas particulier intéressant est celui qui correspond à $\varphi_3 = 2\varphi_1$. On pourrait, par exemple, le réaliser en supposant que chacun des joueurs ait une chance sur trois de gagner : lorsque C gagnerait, il recevrait 1 franc de B et 1 franc de A. Lorsque A gagnerait, il recevrait 1 franc de C et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ de B. Lorsque B gagnerait, il recevrait 1 franc de C et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ de A. Dans le cas considéré, on aurait

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = 4 = 2\varphi_1.$$

La formule précédente (n° 510) qui fait connaître la probabilité $f(\mu, x, y)$ pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y se réduit, lorsque $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\varphi_3 = 2\varphi_1$, à la suivante :

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} \, \frac{e^{-\frac{y^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\, dx\, dy,$$

c'est-à-dire au produit des probabilités qu'auraient séparément les joueurs A et B pour perdre les sommes x et y. Donc, dans ce cas, la connaissance de la perte de l'un des joueurs A ou B n'influe pas sur les probabilités relatives à l'autre joueur.

En résumé, dans le cas général, la connaissance de deux fonctions d'instabilité ne détermine pas la troisième.

514. Cas particuliers. — Lorsque le jeu est équitable, ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont nuls et la probabilité $f(\mu, x, y)$ est

$$f(\mu, x, y) = \frac{2 e^{-\frac{4\varphi_2 x^2 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)xy + 4\varphi_1 y^2}{\mu(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)}}}{\pi\mu\sqrt{2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2}}\, dx\, dy.$$

Lorsque le jeu est symétrique, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, et l'on a

$$f(\mu, x, y) = \frac{2e^{-\frac{4(x^2+xy+y^2)}{3\mu\varphi_1}}}{\pi\mu\varphi_1\sqrt{3}}\,dx\,dy.$$

515. **Surface de probabilité.** — L'équation

$$z = \frac{2e^{-\frac{4}{\mu M^2}[\varphi_2 x^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)xy + \varphi_1 y^2]}}{\pi\mu M},$$

qui exprime la probabilité pour que les pertes soient x et y (M^2 remplace la quantité $2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2$), représente une surface dont chaque section passant par l'axe des z est une courbe de probabilité de la forme précédemment étudiée.

La surface de probabilité présente la forme d'une sorte de cloche elliptique reposant sur le plan des xy et en réalité asymptote à ce plan ; elle se déforme très vite, car la hauteur de son sommet diminue proportionnellement à μ.

Les coordonnées des points x, y, qui ont même probabilité, sont liées par l'équation

$$\varphi_2 x^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)xy + \varphi_1 y^2 = u^2.$$

Les courbes d'égale probabilité sur le plan des xy sont donc des ellipses homothétiques ayant l'origine pour centre.

A chaque valeur de u^2 correspond une ellipse dont la surface est

$$\frac{2\pi u^2}{M}.$$

La surface d'une couronne elliptique élémentaire est

$$\frac{4\pi u\,du}{M},$$

et la probabilité sur cette couronne est

$$\frac{2e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}}{\pi\mu M}\,\frac{4\pi u\,du}{M} = \frac{8e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}u\,du}{\mu M^2}.$$

516. La probabilité entre l'ellipse u et l'infini a pour valeur

$$\int_u^\infty \frac{8e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}}{\mu M^2} u\,du = e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}};$$

en particulier, la probabilité entre zéro et l'infini est égale à un.

517. La *valeur moyenne* de u est l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{8e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}u^2\,du}{\mu M^2} = \frac{\sqrt{\pi} M\sqrt{\mu}}{4} = 0{,}4431\ldots M\sqrt{\mu}.$$

518. La *valeur probable* de u est donnée par l'équation

$$e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}} = \frac{1}{2};$$

d'où

$$u = 0{,}416 M\sqrt{\mu}.$$

519. La couronne élémentaire de *probabilité maxima* se détermine en annulant la dérivée de

$$\frac{8e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}u}{\mu M^2};$$

on obtient ainsi

$$u = \frac{M\sqrt{\mu}}{2\sqrt{2}} = 0{,}353 M\sqrt{\mu}.$$

520. La surface de probabilité est à courbures de même sens dans le voisinage de son sommet et à courbures opposées près du plan asymptote $z = 0$; elle se compose donc de deux régions séparées par une ligne de points paraboliques.

La projection de cette ligne sur le plan des xy a pour équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

ou

$$\varphi_2 x^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)xy + \varphi_1 y^2 = \frac{\mu M^2}{8}.$$

C'est l'équation d'une ellipse analogue à celles que nous avons considérées. Dans l'espace, la ligne des points paraboliques est donc une ligne de niveau de la surface de probabilité.

Il faut remarquer que la valeur de u correspondant à cette ellipse est la même que la valeur obtenue pour la couronne de probabilité maxima.

521. Considérons la probabilité comprise à l'intérieur de l'ellipse u :

$$1 - e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}.$$

Pour que cette probabilité reste constante lorsque μ croît, il faut que u^2 varie proportionnellement à μ.

En d'autres termes, les aires des ellipses isoprobables croissent proportionnellement à μ et les rayons homologues proportionnellement à $\sqrt{\mu}$. Ces rayons diminuent donc *relativement* à μ.

Si nous considérons une ellipse de grandeur fixe, la probabilité relative à cette ellipse décroîtra indéfiniment jusqu'à zéro lorsque μ croîtra.

Il en serait de même de la probabilité comprise à l'intérieur de tout contour fini, car on pourrait toujours imaginer une ellipse qui renfermerait entièrement ce contour; la probabilité considérée pourrait commencer par croître, mais elle tendrait toujours finalement vers zéro.

522. Si l'on considère une couronne elliptique élémentaire fixe correspondant à une valeur donnée u_1 de u, la probabilité sur cette couronne

$$\frac{8e^{-\frac{4u_1^2}{\mu M^2}}u_1\,du_1}{\mu M^2},$$

croît lorsque μ augmente jusqu'à un certain maximum

$$\frac{2e^{-1}}{u_1}du_1,$$

atteint lorsque $\mu = \frac{4u_1^2}{M^2}$, et décroît ensuite.

Quand μ atteint la valeur

$$\mu = \frac{8u_1^2}{M^2},$$

double de la précédente, la couronne elliptique considérée devient couronne de probabilité maxima et correspond à la ligne des points paraboliques; sa probabilité est alors

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{u_1}\,du_1;$$

elle a diminué d'environ un cinquième relativement à sa valeur maxima.

Si l'on assimile la variable μ au temps, on peut dire que la probabilité passe d'abord par son maximum individuel et que c'est seulement au bout d'un temps double qu'elle devient maxima relativement aux autres.

523. Dans le cas général, la probabilité relative à x et à y est

$$f(\mu, x, y) = \frac{2e^{-\frac{4}{\mu M^2}[\varphi_2(x+\mu\psi_1)^2+(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)(x+\mu\psi_1)(y+\mu\psi_2)+\varphi_1(y+\mu\psi_2)^2]}}{\pi\mu M}\,dx\,dy;$$

si l'on pose

$$x + \mu\psi_1 = x',$$
$$y + \mu\psi_2 = y',$$

l'expression de la probabilité devient

$$\frac{2}{\pi\mu M}\,e^{-\frac{4}{\mu M^2}[\varphi_2 x'^2+(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)x'y'+\varphi_1 y'^2]}\,dx'\,dy';$$

elle est analogue à celle qu'on obtient dans le cas du jeu équitable. La déformation de la surface de probabilité, lorsque μ croît, suit donc les mêmes lois, que le jeu soit équitable ou qu'il ne le soit pas; mais, dans ce dernier cas, la surface de probabilité est animée dans son ensemble d'un mouvement rectiligne qui est uniforme si μ désigne le temps.

524. **Application à la théorie des épreuves répétées.** — *Trois événements de probabilités p, q, r peuvent se produire à chaque épreuve et*

s'excluent mutuellement de sorte que $p+q+r=1$; quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves, le premier se produise X fois et le second Y fois?

Supposons que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : à chaque partie, le joueur A a probabilité p de gagner 2 francs et probabilité $(1-p)$ de perdre 1 franc; le joueur B a probabilité q de gagner 2 francs et probabilité $(1-q)$ de perdre 1 franc; le joueur C a probabilité $r=(1-p-q)$ de gagner 2 francs et probabilité $(1-r)=(p+q)$ de perdre 1 franc. On suppose que, à chaque partie, l'un des joueurs gagne 2 francs, chacun des deux autres perdant 1 franc.

Si, sur μ parties, le joueur A a gagné X parties, il en a perdu $\mu-X$ et sa perte totale est

$$\mu-X-2X=\mu-3X.$$

Si le joueur B a gagné Y parties, il en a perdu $\mu-Y$ et sa perte totale est

$$\mu-Y-2Y=\mu-3Y.$$

La probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement de probabilité p se produise X fois et l'événement de probabilité q, Y fois est la probabilité pour que, sur μ parties, A gagne X parties et B, Y parties ou pour que A perde la somme $\mu-3X$ et B la somme $\mu-3Y$.

Cette probabilité est exprimée par la formule du paragraphe 510, il suffit de calculer les coefficients : on a

$$\psi_1=\varepsilon_1=2p-(1-p)=3p-1,$$

$$\psi_2=3q-1,\qquad \psi_3=3r-1,$$

$$\varphi_1=2[4p+(1-p)-(3p-1)^2]=18p(1-p),$$

$$\varphi_2=18q(1-q),\qquad \varphi_3=18r(1-r),$$

$$\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3=18.2pq,\qquad \Delta=18.18pqr.$$

La probabilité pour que l'événement de probabilité p se produise X fois et l'événement de probabilité q, Y fois, en μ épreuves, est donc

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu pqr}[q(1-q)(X-\mu p)^2+2pq(X-\mu p)(Y-\mu q)+p(1-p)(Y-\mu q)^2]}}{2\pi\mu\sqrt{pqr}}\,dX\,dY.$$

Cette formule établie en supposant la continuité n'est applicable que si μ est un grand nombre.

525. La plus grande probabilité a lieu lorsque $X = \mu p$ et $Y = \mu q$, c'est-à-dire lorsque les événements se produisent en nombres proportionnels à leurs probabilités.

La valeur moyenne de X est μp, la valeur moyenne de Y est μq.

Les quantités μp et μq sont donc les valeurs normales des nombres des arrivées des événements.

Si le premier événement de probabilité p se produit $\mu p + x$ fois et le second, de probabilité q, $\mu q + y$ fois, on dit que les *écarts* sont x et y.

La probabilité pour que les écarts soient x et y est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu pqr}[q(1-q)x^2+2pqxy+p(1-p)y^2]}}{2\pi\mu\sqrt{pqr}}\,dx\,dy.$$

526. **Probabilités mêlées.** — *A chaque épreuve, il y a probabilité p pour que l'événement A′ se produise seul, probabilité q pour que l'événement B′ se produise seul, probabilité r pour que les événements A′ et B′ se produisent tous deux et probabilité $t = 1 - p - q - r$ pour qu'aucun des événements ne se produise. Quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement A′ se produise X fois et l'événement B′, Y fois?*

Supposons que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : à chaque partie, le joueur A a probabilité $p + r$ pour perdre 1 franc et probabilité $1 - (p + r)$ pour faire partie nulle.

Le joueur B a probabilité $q + r$ pour perdre 1 franc et probabilité $1 - (q + r)$ pour faire partie nulle.

Le joueur C a probabilité r pour gagner 2 francs, probabilité $p + q$ pour gagner 1 franc et probabilité t pour faire partie nulle.

La probabilité pour que l'événement A′ se produise X fois et l'événement B′, Y fois en μ épreuves est la probabilité pour que le joueur A perde la somme X et le joueur B la somme Y en μ parties.

Cette probabilité est donnée par la formule du n° 511, on a

$$\psi_1 = 1 - p - r, \qquad \psi_2 = 1 - q - r,$$
$$\psi_3 = 2r + p + q,$$
$$\varphi_1 = 2[(p+r) - (p+r)^2] = 2(p+r)(1-p-r),$$
$$\varphi_2 = 2[(q+r) - (q+r)^2] = 2(q+r)(1-q-r),$$
$$\varphi_3 = 2[4r + p + q - (2r+p+q)^2],$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = 2.2(pq - rt),$$
$$\Delta = 4[(p+r)(q+r)(p+t)(q+t) - (pq-rt)^2].$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{e^{-\frac{1}{\mu}\frac{2(q+r)(1-q-r)[X-\mu(p+r)]^2+4(pq-rt)[X-\mu(p+r)][Y-\mu(q+r)]+2(p+r)(1-p-r)[Y-\mu(q+r)]^2}{4[(p+r)(q+r)(p+t)(q+t)-(pq-rt)^2]}}}{\pi\mu\sqrt{4[(p+r)(q+r)(p+t)(q+t)-(pq-rt)^2]}}\,dX\,dY.$$

Cette formule suppose la continuité, elle n'est applicable que si μ est un grand nombre.

527. La plus grande probabilité a lieu lorsque $X = \mu(p+r)$ et $Y = \mu(q+r)$, c'est-à-dire lorsque les événements se produisent en nombres proportionnels à leurs probabilités.

La valeur moyenne de X est $\mu(p+r)$, la valeur moyenne de Y est $\mu(q+r)$.

Les quantités $\mu(p+r)$ et $\mu(q+r)$ sont donc les valeurs normales des nombres des arrivées des événements.

Si le premier événement se produit $\mu(p+r)+x$ fois et le second $\mu(q+r)+y$ fois, on dit que les *écarts* sont x et y.

La probabilité pour que les écarts soient x et y est

$$\frac{e^{-\frac{1}{\mu}\frac{2(q+r)(1-q-r)x^2+4(pq-rt)xy+2(p+r)(1-p-r)y^2}{4[(p+r)(q+r)(p+t)(q+t)-(pq-rt)^2]}}}{\pi\mu\sqrt{4[(p+r)(q+r)(p+t)(q+t)-(pq-rt)^2]}}\,dx\,dy.$$

On peut donner à cette quantité une forme un peu différente en introduisant dans son expression les probabilités $v = p+r$ et $w = q+r$

des événements A' et B'. On a alors pour valeur de la probabilité

$$\frac{e^{-\frac{1}{\mu}\frac{w(1-w)x^2+(vw-r)2xy+v(1-v)y^2}{2[vw(1-v)(1-w)-(vw-r)^2]}}}{2\pi\mu\sqrt{vw(1-v)(1-w)-(vw-r)^2}}\,dx\,dy.$$

528. **Probabilités du second genre.** — *Le joueur* B *possède la somme* y *et les joueurs* A *et* C *une somme infinie, quelle est la probabilité pour que, à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie exactement, le joueur* B *soit ruiné, le joueur* A *ayant perdu la somme* x?

On suppose que les joueurs règlent les différences après chaque partie.

Désignons, comme précédemment, par $f(\mu, x, y)$ la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y et par $\chi(\mu, x, y)$ la probabilité cherchée. Nous allons égaler deux expressions différentes de la probabilité $f(\mu, x, y)$.

Le joueur B ne peut perdre la somme y sans avoir perdu précédemment la somme y_1, si y_1 est inférieur à y.

La probabilité pour que, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x_1, la perte y_1 étant pour la première fois atteinte par le joueur B, est $\chi(\mu_1, x_1, y_1)$.

La probabilité pour que, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x_1, la perte y_1 étant pour la première fois atteinte par le joueur B, et les pertes finales des deux joueurs étant x et y à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\chi(\mu_1, x_1, y_1) f(\mu-\mu_1, x-x_1, y-y_1).$$

La perte y_1 pouvant être atteinte pour la première fois à toutes les parties de zéro à μ et, d'autre part, la perte x_1 pouvant avoir toute valeur de $-\infty$ à $+\infty$, la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_0^{\mu}\int_{-\infty}^{-\infty} \chi(\mu_1, x_1, y_1) f(\mu-\mu_1, x-x_1, y-y_1)\, d\mu_1\, dx_1;$$

cette même probabilité s'écrit également $f(\mu, x, y)$; on doit donc

avoir

$$f(\mu, x, y) = \int_0^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\mu_1, x_1, y_1) f(\mu - \mu_1, x - x_1, y - y_1)\, dx_1\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction χ.

529. Nous supposerons que le jeu est équitable et que les conditions du jeu sont les mêmes pour les trois joueurs; alors

$$f(\mu, x, y) = \frac{2e^{-\frac{4}{3\mu\varphi_1}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\mu\varphi_1\sqrt{3}}.$$

Dans cette hypothèse, on a

$$\chi(\mu, x, y) = \frac{2ye^{-\frac{4}{3\mu\varphi_1}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\mu^2\varphi_1\sqrt{3}}.$$

Le second membre de l'équation conditionnelle devient en effet

$$\int_0^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4y_1}{3\pi^2\varphi_1^2\mu_1^2(\mu-\mu_1)} e^{-\frac{4}{3\mu_1\varphi_1}(x_1^2+x_1y_1+y_1^2)} e^{-\frac{4}{3(\mu-\mu_1)\varphi_1}[(x-x_1)^2+(x-x_1)(y-y_1)+(y-y_1)^2]}\, dx_1\, d\mu_1;$$

une première intégration par rapport à x_1 est possible car, relativement à cette variable, l'intégrale est de la forme connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}.$$

Cette intégration une fois effectuée, l'intégrale se réduit à

$$\int_0^{\mu} \frac{2y_1 e^{-\frac{3\mu^2y_1^2 - \mu_1(4\mu x^2 - 4\mu xy + 4\mu y^2 - 6\mu yy_1) - \mu_1^2(4x^2+y^2+4xy)}{3\varphi_1\mu\mu_1(\mu-\mu_1)}}}{\sqrt{3}\pi\sqrt{\pi}\varphi_1\sqrt{\varphi_1}\sqrt{\mu}\mu_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu-\mu_1}}\, d\mu_1,$$

et, en posant,

$$\lambda^2 = \frac{(y-y_1)^2}{\mu\varphi_1}\,\frac{\mu_1}{\mu-\mu_1},$$

elle devient

$$\frac{4y_1(y-y_1)e^{-\frac{4x^2-4xy+4y^2-6yy_1+6y_1^2}{3\mu\varphi_1}}}{\sqrt{3}\pi\sqrt{\pi}\varphi_1^2\mu^2}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2-\left[\frac{y_1(y-y_1)}{\mu\varphi_1}\right]^2\frac{1}{\lambda^2}}\,\frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Elle est de la forme connue

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2-\frac{a^2}{\lambda^2}}\frac{d\lambda}{\lambda^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2a}.$$

Le second membre de l'équation conditionnelle se réduit donc à

$$\frac{2e^{-\frac{4}{3\mu\varphi_1}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\mu\sqrt{3}\varphi_1},$$

il est identique au premier.

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné à la $\mu^{\text{ième}}$ partie et pour que, en même temps, le joueur A perde la somme x est donc

$$\frac{2ye^{-\frac{4}{3\mu\varphi_1}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\mu^2\varphi_1\sqrt{3}}\,dx\,d\mu.$$

On pourrait formuler contre le raisonnement employé une critique déjà prévue (nº 345). On pourrait également, dans le cas considéré, faire usage du procédé rigoureux décrit au paragraphe 351.

530. **Distribution des probabilités.** — *Les joueurs* A *et* C *possèdent une somme infinie et le joueur* B *possède la somme m; quelle est la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur* A *ait perdu la somme x et le joueur* B *la somme y?*

Nous supposerons, comme pour le problème précédent, que le jeu est symétrique.

Si la fortune du joueur B était infinie, la probabilité cherchée aurait pour valeur

$$f(\mu, x, y)=\frac{2e^{-\frac{4}{3\mu\varphi_1}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\sqrt{3}\mu\varphi_1}.$$

Il faut retrancher de cette quantité les probabilités relatives aux cas où le joueur B est ruiné avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Le joueur B peut être ruiné à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ayant perdu la somme x_1; la probabilité de cette éventualité est

$$\frac{2me^{-\frac{4}{3\mu_1\varphi_1}(x_1^2+x_1m+m^2)}}{\pi\mu_1^2\varphi_1\sqrt{3}},$$

Supposons que, au moment où le joueur B est ruiné à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie (le joueur A ayant perdu la somme x_1), ce joueur B puisse continuer à jouer, possédant une somme infinie ; la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, les joueurs A et B aient perdu respectivement les sommes x et y serait

$$f(\mu-\mu_1,\ x-x_1,\ y-m)=\frac{2\,e^{-\frac{4[(x-x_1)^2+(x-x_1)(y-m)+(y-m)^2]}{3(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\pi\sqrt{3}(\mu-\mu_1)\varphi_1}.$$

La possibilité de la ruine du joueur B à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie (le joueur A ayant perdu la somme x_1) diminue donc, d'après le principe de la probabilité composée, la probabilité $f(\mu, x, y)$ de la quantité

$$\frac{2m\,e^{-\frac{4(x_1^2+x_1m+m^2)}{3\mu_1\varphi_1}}}{\pi\mu_1^2\varphi_1\sqrt{3}}\;\frac{2\,e^{-\frac{4[(x-x_1)^2+(x-x_1)(y-m)+(y-m)^2]}{3(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\pi\varphi_1(\mu-\mu_1)\sqrt{3}}.$$

Le joueur B peut être ruiné à toutes les parties de zéro à μ et, d'autre part, x_1 peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. La possibilité de la ruine du joueur B diminue donc la probabilité $f(\mu, x, y)$ de la quantité

$$\int_0^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2m\,e^{-\frac{4(x_1^2+x_1m+m^2)}{3\mu_1\varphi_1}}}{\pi\mu_1^2\varphi_1\sqrt{3}}\;\frac{2\,e^{-\frac{4[(x-x_1)^2+(x-x_1)(y-m)+(y-m)^2]}{3(\mu-\mu_1)\varphi_1}}}{\pi(\mu-\mu_1)\varphi_1\sqrt{3}}\,dx_1\,d\mu_1.$$

On obtient la valeur de cette intégrale par un procédé analogue à celui qui a été employé dans la question précédente (n° 529). L'intégration en x_1 étant effectuée, on pose

$$\lambda^2=\frac{(m-y)^2}{\mu\varphi_1}\,\frac{\mu_1}{\mu-\mu_1},$$

au lieu de

$$\lambda^2=\frac{(y-x_1)^2}{\mu\varphi_1}\,\frac{\mu_1}{\mu-\mu_1},$$

afin de pouvoir appliquer la formule

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2-\frac{a^2}{\lambda^2}}\frac{d\lambda}{\lambda^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2a},$$

qui suppose a positif. Finalement, la valeur de l'intégrale est

$$\frac{2\, e^{-\frac{4}{3\mu\varphi_1}[x^2+xy+y^2+3m(m-y)]}}{\pi\mu\varphi_1\sqrt{3}}.$$

La probabilité pour que le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y est donc

$$\frac{2\, e^{-\frac{4}{3\mu\varphi_1}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\mu\varphi_1\sqrt{3}} - \frac{2\, e^{-\frac{4}{3\mu\varphi_1}[x^2+xy+y^2+3m(m-y)]}}{\pi\mu\varphi_1\sqrt{3}};$$

on peut l'écrire

$$f(\mu, x, y)\left[1 - e^{-\frac{4m(m-y)}{\mu\varphi_1}}\right].$$

531. Si l'on intègre par rapport à x entre $-\infty$ et $+\infty$, on obtient la probabilité pour que la perte du joueur B soit y, celle du joueur A étant quelconque; le résultat de cette intégration est

$$\frac{e^{-\frac{y^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dy - \frac{e^{-\frac{(2m-y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\,dy.$$

C'est la formule que nous avions démontrée (n° 323) en nous basant sur de simples raisons de symétrie. (La quantité que nous désignons ici par y était désignée par $m-y$ au paragraphe 323.)

532. **Probabilités des genres supérieurs.** — Les probabilités du troisième genre seraient relatives aux cas où deux des joueurs ont des fortunes finies et les probabilités du quatrième genre supposeraient aux trois joueurs des fortunes finies.

Les questions relatives aux déterminations des probabilités semblent d'une grande complication, mais il est possible de déterminer la durée moyenne du jeu, même en supposant limitées les fortunes des trois joueurs.

533. *Les joueurs* A, B, C, *possédant les sommes* a, b, c, *jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux ; quelle est la durée moyenne du jeu?*

Désignons par $\lambda(x, y)$ la durée moyenne quand le joueur A possède

la somme x, le joueur B la somme y et le joueur C la somme

$$a+b+c-x-y=s-x-y.$$

Soit encore $\zeta(u,v)\,du\,dv$ la probabilité pour que, à une partie, le joueur A perde la somme u et le joueur B la somme v; on a, en supposant le jeu uniforme,

$$\lambda(x,y)=\Delta\mu+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta(u,v)\times\lambda(x-u,y-v)\,du\,dv.$$

En effet, la durée moyenne se composera d'abord de la première partie, $\Delta\mu$. Puis il y aura probabilité $\zeta(u,v)\,du\,dv$ pour que la durée moyenne devienne $\lambda(x-u,y-v)$, et comme u et v peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, l'équation qui précède est l'expression des principes des probabilités composées et totales.

(Dans l'intégrale double, nous pouvons considérer les limites comme infinies, par suite de la petitesse de u et de v; en toute rigueur, u et v sont limités, leur somme doit être inférieure à s.)

Développons $\lambda(x-u,y-v)$ par la formule de Taylor

$$\begin{aligned}\lambda(x-u,y-v)=\lambda(x,y)&-u\frac{\partial\lambda}{\partial x}-v\frac{\partial\lambda}{\partial y}\\&+\frac{u^2}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+uv\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}+\frac{v^2}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\ldots.\end{aligned}$$

L'équation antéprécédente devient ainsi

$$\begin{aligned}\lambda(x,y)=1+\lambda(x,y)&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta(u,v)\,du\,dv\\&-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u\zeta(u,v)\,du\,dv-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v\zeta(u,v)\,du\,dv\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\zeta(u,v)\,du\,dv+\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}uv\zeta(u,v)\,du\,dv\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v^2\zeta(u,v)\,du\,dv+\ldots.\end{aligned}$$

Nous avons remplacé $\Delta\mu$ par l'unité parce que $\zeta(u,v)\,du\,dv$ exprime la loi de probabilité lorsqu'on prend $\Delta\mu$ pour unité.

La première intégrale double a pour valeur un. La seconde est la

valeur moyenne de u; nous supposerons le jeu équitable et alors cette intégrale sera nulle de même que la troisième.

La quatrième est la valeur moyenne de u^2, quantité que nous avons désignée par $\frac{\varphi_1}{2}$.

La sixième est la valeur moyenne de v^2, c'est-à-dire $\frac{\varphi_2}{2}$.

Calculons la cinquième qui exprime la valeur moyenne de uv.

Si l'on désigne par w la perte du troisième joueur C pour une partie, on a

$$u + v + w = 0$$

et, par suite,

$$w^2 = (u + v)^2.$$

La valeur moyenne de $(u + v)^2$ est donc la valeur moyenne de w^2, c'est-à-dire $\frac{\varphi_3}{2}$.

Or la valeur moyenne de $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$ est la somme de la valeur moyenne de u^2 ou $\frac{\varphi_1}{2}$, de la valeur moyenne de v^2 ou $\frac{\varphi_2}{2}$ et du double de la valeur moyenne de uv.

La valeur moyenne de uv est donc

$$\frac{\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2}{4}.$$

Les termes non écrits dans le développement de $\lambda(x, y)$ sont d'abord des termes contenant des dérivées troisièmes $\frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^2 \partial y}, \dots$, multipliées par des valeurs moyennes du troisième ordre, celles de u^3, de $u^2 v$, ...

Nous supposerons que le jeu est symétrique, c'est-à-dire que ses conditions sont les mêmes pour les trois joueurs; alors les moyennes du troisième ordre, du cinquième et de tous les ordres impairs seront nulles. Par exemple, la valeur moyenne de $u^3 v^2$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 v^2 \zeta(u, v)\, du\, dv$$

est nulle; si, en effet, nous considérons l'élément $u^3 v^2 \zeta(u, v)\, du\, dv$, et si nous changeons u en $-u$ et v en $-v$, $\zeta(u, v)$ ne change pas, par

suite de la symétrie, et l'élément change de signe. A chaque élément correspond un élément égal et de signe contraire; la somme de tous les éléments est donc nulle.

La symétrie supposée entraîne aussi l'égalité des trois quantités φ_1, φ_2, φ_3.

Parmi les termes non écrits, il n'y a donc plus à considérer que les termes contenant des dérivées quatrièmes, sixièmes, ..., multipliées par des valeurs moyennes des quatrième, sixième, ... ordre. $\Delta\mu$ étant infiniment petit, ces valeurs moyennes sont infiniment petites, relativement aux valeurs moyennes du second ordre.

Finalement, l'équation qui détermine λ se réduit à

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{4}{\varphi_1} = 0.$$

La durée moyenne est nulle quand un des joueurs est ruiné; les conditions aux limites que doit satisfaire la fonction λ sont donc

$$\lambda(0, y) = 0, \qquad \lambda(x, 0) = 0,$$

et $\lambda = 0$ lorsque $x + y = s$.

534. L'équation indéfinie et les équations aux limites sont vérifiées par la fonction

$$\lambda = \frac{4xy(s - x - y)}{s\varphi_1};$$

cette solution est d'ailleurs unique, car s'il existait une autre solution λ', leur différence $(\lambda - \lambda')$ vérifierait l'équation

$$\frac{\partial^2(\lambda - \lambda')}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(\lambda - \lambda')}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2(\lambda - \lambda')}{\partial y^2} = 0,$$

et les conditions aux limites $(\lambda - \lambda') = 0$, pour x ou y ou $s - x - y$ nul.

Or on sait qu'une fonction $(\lambda - \lambda')$ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles qui précède et qui est nulle sur tout le contour est nécessairement nulle.

Donc $\lambda' = \lambda$ et λ est la seule solution du problème proposé.

535. Le calcul des probabilités permettrait d'ailleurs de démontrer

que la solution λ est unique. Cherchons, en effet, la probabilité pour que le jeu considéré dure indéfiniment. En désignant par $\chi(x, y)$ cette probabilité, quand le joueur A possède la somme x et le joueur B la somme y, et en raisonnant comme nous venons de le faire pour déterminer la durée moyenne, on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0$$

avec les conditions aux limites $\chi = 0$ pour x ou y ou $s - x - y$ nul.

Le jeu étant uniforme, la probabilité dans une aire finie est nécessairement nulle au bout d'un temps infini, donc χ est nul et par suite la fonction $(\lambda - \lambda')$, qui vérifie la même équation indéfinie et les mêmes conditions aux limites, est nulle.

536. Lorque le joueur A possède la somme x, le joueur B la somme y et le joueur C la somme $s - x - y$, la durée moyenne du jeu est

$$\lambda(x, y) = \frac{4xy(s - x - y)}{s \varphi_1}.$$

Au début du jeu, $x = a$, $y = b$ et $s - x - y = c$. Donc :

La durée moyenne du jeu

$$\frac{4abc}{\varphi_1(a + b + c)}$$

est proportionnelle au produit des fortunes des joueurs et inversement proportionnelle à la somme des mêmes fortunes et à la fonction d'instabilité.

537. Si la fortune du joueur C est infinie, la durée moyenne du jeu est

$$\frac{4ab}{\varphi_1};$$

elle est proportionnelle au produit des fortunes des joueurs A et B. Si deux joueurs ont des fortunes infinies, la durée moyenne du jeu est infinie.

538. *Les joueurs* A, B, C, *dont les fortunes sont a, b, c, jouent jusqu'à*

ce que deux d'entre eux soient ruinés; quelle est la durée moyenne du jeu?

Nous supposerons que les conditions du jeu soient les mêmes que précédemment et caractérisées par la fonction φ_1, puis qu'après la ruine de l'un des joueurs, les deux autres jouent à un jeu équitable caracterisé par la fonction φ_2.

En désignant comme précédemment par $\lambda(x, y)$ la durée moyenne totale du jeu quand le joueur A possède la somme x, le joueur B la somme y et le joueur C la somme $s - x - y$, on a toujours

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{4}{\varphi_1} = 0,$$

mais les conditions aux limites ne sont plus les mêmes.

Lorsque $x = 0$, le joueur A est ruiné, et si le joueur B possède la somme y, le joueur C possède la somme $(s - y)$.

Ces deux joueurs devant jouer jusqu'à la ruine de l'un d'eux, la durée moyenne de ce nouveau jeu est (n° 401)

$$\frac{2y(s-y)}{\varphi_2}.$$

Le même raisonnement s'applique au cas où l'un des joueurs B ou C serait ruiné le premier; les conditions aux limites sont donc :

Pour $x = 0$,

$$\lambda = \frac{2y(s-y)}{\varphi_2};$$

Pour $y = 0$,

$$\lambda = \frac{2x(s-x)}{\varphi_2};$$

Pour $s - x - y = 0$,

$$\lambda = \frac{2xy}{\varphi_2}.$$

539. On reconnait facilement que l'équation indéfinie et les équations aux limites sont vérifiees si l'on pose

$$\lambda = \frac{4xy(s-x-y)}{\varphi_1 s} + \frac{2}{\varphi_2 s}\big[xy(x+y) + x(s-x-y)(s-y) \\ + y(s-x-y)(s-x)\big],$$

on démontrerait d'ailleurs, comme précédemment, que cette solution est unique.

Au début du jeu, $x = a$, $y = b$, $s - x - y = c$. Donc :

La durée moyenne du jeu a pour expression

$$\frac{4abc}{\varphi_1(a+b+c)} + \frac{2}{\varphi_2(a+b+c)}[ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)].$$

La première partie de la somme exprime la durée moyenne jusqu'à ce que l'un des joueurs soit ruiné ; le second terme exprime la durée moyenne quand les deux autres joueurs jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux.

540. **Probabilités non uniformes.** — Nous avons supposé jusqu'à présent qu'il y avait uniformité, c'est-à-dire que les épreuves successives étaient identiques. Nous ne ferons plus cette hypothèse et nous supposerons que les conditions à chaque épreuve sont variables suivant une loi donnée et dépendant seulement du rang occupé par l'épreuve.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Trois joueurs A, B, C, *possédant chacun une fortune infinie, doivent jouer* μ *parties ; quelle est la probabilité pour que le joueur* A *perde la somme* x *et le joueur* B *la somme* y ?

A chaque partie, par exemple à la $\mu^{\text{ième}}$, le jeu sera caractérisé : pour le joueur A, par l'espérance totale $\psi'_1(\mu)\,d\mu$ relative à cette $\mu^{\text{ième}}$ partie et par la fonction d'instabilité $\varphi'_1(\mu)\,d\mu$ relative à la même partie.

De même pour le joueur B, le jeu sera caractérisé à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par les fonctions $\psi'_2(\mu)\,d\mu$ et $\varphi'_2(\mu)\,d\mu$, et pour le joueur C, par les fonctions $\psi'_3(\mu)\,d\mu$ et $\varphi'_3(\mu)\,d\mu$. Nous désignerons par $f(\mu_1, \mu_2, x, y)$ la probabilité pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y entre les parties μ_1 et μ_2.

La probabilité pour que, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x_1 et le joueur B la somme y_1 a pour expression $f(0, \mu_1, x_1, y_1)$.

La probabilité pour que, entre la $\mu_1^{\text{ième}}$ et la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A

ait perdu la somme $x - x_1$ et le joueur B la somme $y - y_1$ est $f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)$.

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y, les pertes de ces joueurs ayant été x_1, y_1 à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$f(o, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1).$$

Les pertes x_1, y_1 ayant pu, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, avoir toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(o, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)\, dx_1\, dy_1.$$

Cette même probabilité s'exprime aussi par $f(o, \mu, x, y)$; on doit donc avoir

$$f(o, \mu, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(o, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)\, dx_1\, dy_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f; elle doit être vérifiée quels que soient μ_1 et μ.

Lorsque la différence $\mu - \mu_1$ tend vers zéro, la probabilité pour que les écarts $x - x_1 = u$, $y - y_1 = v$ correspondant à cet intervalle soient compris entre des limites données $-\alpha_1, \alpha_2$ et $-\beta_1, \beta_2$ doit tendre vers 1; on doit donc avoir

$$\lim \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{-\beta_1}^{\beta_2} f(\mu_1, \mu, u, v)\, du\, dv = 1 \qquad \text{pour } \mu - \mu_1 = 0,$$

quelque petites que soient les quantités positives (et fixes) α_1, α_2, β_1, β_2.

Ces deux équations de condition suffisent pour déterminer la fonction f, par suite de la continuité de la variable μ.

L'analyse qui permet d'obtenir la fonction f sera développée au Chapitre suivant; nous nous contenterons ici d'en vérifier le résultat.

541. Les équations sont satisfaites si l'on a

$$f(\mu_1, \mu_2, x, y) = \frac{2\,e^{-4\frac{\left[x+\int_{\mu_1}^{\mu_2}\psi_1'(\mu)\,d\mu\right]^2\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_2'(\mu)\,d\mu+\left[x+\int_{\mu_1}^{\mu_2}\psi_1'(\mu)\,d\mu\right]\left[y+\int_{\mu_1}^{\mu_2}\psi_2'(\mu)\,d\mu\right]\int_{\mu_1}^{\mu_2}[\varphi_1'(\mu)+\varphi_2'(\mu)-\varphi_3'(\mu)]\,d\mu+\left[y+\int_{\mu_1}^{\mu_2}\psi_2'(\mu)\,d\mu\right]^2\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_1'(\mu)\,d\mu}{2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_1'(\mu)\,d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_2'(\mu)\,d\mu\right]+2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_1'(\mu)\,d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_3'(\mu)\,d\mu\right]+2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_2'(\mu)\,d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_3'(\mu)\,d\mu\right]-\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_1'(\mu)\,d\mu\right]^2-\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_2'(\mu)\,d\mu\right]^2-\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_3'(\mu)\,d\mu\right]^2}}}{\pi\sqrt{\begin{array}{l}2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_1'(\mu)\,d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_2'(\mu)\,d\mu\right]+2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_1'(\mu)\,d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_3'(\mu)\,d\mu\right]+2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_2'(\mu)\,d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_3'(\mu)\,d\mu\right]\\ \quad-\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_1'(\mu)\,d\mu\right]^2-\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_2'(\mu)\,d\mu\right]^2-\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2}\varphi_3'(\mu)\,d\mu\right]^2\end{array}}}.$$

La vérification se fait par la même intégrale que précédemment (n° 510).

S'il s'agit de la probabilité dans l'intervalle zéro, μ, on peut remplacer les intégrales telles que $\int_0^{\mu}\varphi'(\mu)\,d\mu$ par $\varphi(\mu)$ et finalement :

La probabilité pour que, à la $\mu^{ième}$ partie, le joueur A *ait perdu la somme x et le joueur* B *la somme y est*

$$f(\mu, x, y) = \frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-4\frac{\varphi_2(\mu)[x+\psi_1(\mu)]^2+[\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)][x+\psi_1(\mu)][y+\psi_2(\mu)]+\varphi_1(\mu)[x+\psi_2(\mu)]^2}{2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu)}}}{\sqrt{2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu)}}\,dx\,dy.$$

542. On peut écrire cette expression sous une forme un peu plus simple en se basant sur l'identité

$$\begin{aligned}2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu) &+ 2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu) + 2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu) - [\varphi_1(\mu)]^2 - [\varphi_2(\mu)]^2 - [\varphi_3(\mu)]^2 \\ &= 4\left[\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu) - \left(\frac{\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)}{2}\right)^2\right] \\ &= 4\begin{vmatrix}\varphi_1(\mu) & \dfrac{\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)}{2} \\ \dfrac{\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)}{2} & \varphi_2(\mu)\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

La probabilité est ainsi exprimée par la formule

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\Delta}}\,e^{-\frac{1}{\Delta}\{\varphi_2(\mu)[x+\psi_1(\mu)]^2+[\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)][x+\psi_1(\mu)][y+\psi_2(\mu)]+\varphi_1(\mu)[y+\psi_2(\mu)]^2\}}\,dx\,dy,$$

Δ désignant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(\mu) & \dfrac{\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)}{2} \\ \dfrac{\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)}{2} & \varphi_2(\mu) \end{vmatrix}.$$

543. Les fonctions d'instabilité élémentaires ou finies dépendent des conditions du jeu, mais la connaissance exclusive de deux d'entre elles ne suffit pas pour déterminer la troisième.

La somme des trois espérances $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, $\psi_3(\mu)$ relatives à un intervalle μ quelconque élémentaire ou fini est toujours nulle; c'est un fait presque évident qu'on peut démontrer comme au n° 512.

544. Lorsque le jeu est équitable, l'expression de la probabilité se réduit à

$$f(\mu, x, y) = \frac{2\, e^{-4\frac{\varphi_2(\mu)x^2 + [\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)]xy + \varphi_1(\mu)y^2}{2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu)}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu)}}.$$

L'équation

$$z = f(\mu, x, y)$$

est celle d'une surface dont chaque section passant par l'axe des z est une courbe de probabilité de la forme connue.

La représentation géométrique de la probabilité est la même que dans le cas de l'uniformité, mais la direction des axes des ellipses isoprobables au lieu d'être fixe varie suivant la valeur de μ.

Si, lorsque μ croît indéfiniment, $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, $\varphi_3(\mu)$ ne tendent pas vers l'infini, mais vers des valeurs finies, $\varphi_1(\infty)$, $\varphi_2(\infty)$, $\varphi_3(\infty)$, la surface de probabilité ne tend plus à se confondre avec le plan des xy, mais avec une surface asymptote dont l'équation s'obtient en remplaçant dans la formule précédente $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, $\varphi_3(\mu)$, par $\varphi_1(\infty)$, $\varphi_2(\infty)$, $\varphi_3(\infty)$.

Enfin, si le jeu n'est pas équitable, la surface de probabilité est animée d'un mouvement de translation; mais au lieu que ce mouvement soit rectiligne et uniforme comme dans le cas où les probabilités sont uniformes elles-mêmes, ce mouvement est sans cesse variable et les composantes de sa vitesse sont à chaque instant $\psi_1'(\mu)$ et $\psi_2'(\mu)$.

545. **Application aux épreuves répétées non uniformes.** — *Trois événements s'excluent mutuellement ; leurs probabilités sont respectivement* p_1, q_1, r_1 *à la première épreuve*, p_2, q_2, r_2 *à la seconde*, ..., p_μ, q_μ, r_μ *à la* $\mu^{\text{ième}}$. *Quelle est la probabilité pour que, en* μ *épreuves, le premier se produise* X *fois et le second* Y *fois?*

Supposons que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : A chacune des parties successives, le joueur A a probabilité $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ pour gagner 2^{fr} et probabilité $(1-p_1), (1-p_2), \ldots, (1-p_\mu)$ pour perdre 1^{fr}.

Le joueur B a les probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ de gagner 2^{fr} et $(1-q_1)$, $(1-q_2), \ldots, (1-q_\mu)$ de perdre 1^{fr}.

Le joueur C a les probabilités $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ de gagner 2^{fr} et $(1-r_1)$, $(1-r_2), \ldots, (1-r_\mu)$ de perdre 1^{fr}, $(p_1+q_1+r_1=1, p_2+q_2+r_2=1, \ldots)$. On suppose que, à chaque partie, l'un des joueurs gagne 2^{fr}, chacun des deux autres perdant 1^{fr}.

Si, sur μ parties, le joueur A a gagné X parties, il en a perdu $\mu - X$ et sa perte totale est

$$\mu - X - 2X = \mu - 3X.$$

Si le joueur B a gagné Y parties, il en a perdu $\mu - Y$ et sa perte totale est

$$\mu - Y - 2Y = \mu - 3Y.$$

La probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement de probabilités successives $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ se produise X fois et l'événement de probabilités successives $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, Y fois, est la probabilité pour que, en μ parties, A gagne X parties et B, Y parties ou pour que A perde la somme $\mu - 3X$ et B, la somme $\mu - 3Y$.

Cette dernière probabilité est exprimée par la formule du n° 541 ; on a, dans le cas considéré,

$$\psi_1(\mu) = \Sigma[2p - (1-p)] = \Sigma(3p-1),$$
$$\psi_2(\mu) = \Sigma(3q-1), \qquad \psi_3(\mu) = \Sigma(3r-1),$$
$$\varphi_1(\mu) = \Sigma 2[4p + (1-p) - (3p-1)^2] = 18\Sigma p(1-p),$$
$$\varphi_2(\mu) = 18\Sigma q(1-q), \qquad \varphi_3(\mu) = 18\Sigma r(1-r),$$
$$\varphi_1(\mu) + \varphi_2(\mu) - \varphi_3(\mu) = 18\Sigma 2pq.$$
$$= (18)^2 \begin{vmatrix} \Sigma p(1-p) & \Sigma 2pq \\ \Sigma 2pq & \Sigma q(1-q) \end{vmatrix} = (18)^2 M.$$

La probabilité pour que l'événement de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ se produise X fois et l'événement de probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, Y fois en μ épreuves est donc

$$\frac{e^{-\frac{(X-\Sigma p)^2\Sigma q(1-q)+(X-\Sigma p)(Y-\Sigma q)\Sigma 2pq+(Y-\Sigma q)^2\Sigma p(1-p)}{2M}}}{2\pi\sqrt{M}}\,dX\,dY,$$

M désignant le déterminant

$$M=\begin{vmatrix}\Sigma p(1-p) & \Sigma 2pq\\ \Sigma 2pq & \Sigma q(1-q)\end{vmatrix}.$$

Cette formule, établie en supposant la continuité, n'est applicable que si μ est un grand nombre.

546. La plus grande probabilité a lieu lorsque $X=\Sigma p$ et $Y=\Sigma q$. La valeur moyenne de X est Σp, la valeur moyenne de Y est Σq.

Les quantités Σp et Σq sont donc les valeurs normales des nombres des arrivées des événements.

Si le premier événement se produit $\Sigma p+x$ fois et le second $\Sigma q+y$ fois, on dit que les *écarts* sont x et y.

La probabilité pour que les écarts soient x et y est

$$\frac{e^{-\frac{x^2\Sigma q(1-q)+xy\Sigma 2pq+y^2\Sigma p(1-p)}{2M}}}{2\pi\sqrt{M}}\,dx\,dy.$$

547. **Probabilités mêlées non uniformes.** — *La probabilité pour que l'événement A′ se produise seul est p_1 à la première épreuve, p_2 à la seconde, ..., p_μ à la $\mu^{ième}$.*

La probabilité pour que l'événement B′ se produise seul est q_1 à la première épreuve, q_2 à la seconde, ..., q_μ à la $\mu^{ième}$.

Il y a de même les probabilités successives $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ pour que les événements A′ et B′ se produisent tous deux et les probabilités $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ pour qu'aucun des événements ne se produise.

Quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement A′ se produise X fois et l'événement B′, Y fois?

Supposons que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions sui-

vantes : Le joueur A a successivement les probabilités (p_1+r_1), (p_2+r_2), ..., $(p_\mu+r_\mu)$ pour perdre 1^{fr} et les probabilités $(1-p_1-r_1)$, $(1-p_2-r_2)$, ..., $(1-p_\mu-r_\mu)$ pour faire partie nulle.

Le joueur B a successivement les probabilités (q_1+r_1), (q_2+r_2), ..., $(q_\mu+r_\mu)$ pour perdre 1^{fr} et les probabilités $(1-q_1-r_1)$, ..., $(1-q_\mu-r_\mu)$, pour faire partie nulle.

Le joueur C a successivement les probabilités r_1, r_2, ..., r_μ pour gagner 2^{fr}, (p_1+q_1), (p_2+q_2), ... $(p_\mu+q_\mu)$ pour gagner 1^{fr} et t_1, t_2, ..., t_μ pour faire partie nulle.

La probabilité pour que l'événement A′ se produise X fois et l'événement B′, Y fois en μ épreuves est la probabilité pour que le joueur A perde X francs et le joueur B, Y francs en μ parties.

Cette probabilité est donnée par la formule du n° 542. On a dans le cas actuel

$$\psi_1(\mu)=\Sigma(-p-r),\qquad \psi_2(\mu)=\Sigma(-q-r),\qquad \psi_3(\mu)=\Sigma(2r+p+q).$$

$$\varphi_1(\mu)=\Sigma 2(p+r)(1-p-r),\qquad \varphi_2(\mu)=\Sigma 2(q+r)(1-q-r),$$

$$\varphi_3(\mu)=\Sigma 2(p+q+4r-[2r+p+q]^2).$$

$$\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)=2\Sigma 2(pq-rt),$$

$$\Delta=4\{[\Sigma(p+r)(1-p-r)][\Sigma(q+r)(1-q-r)]-[\Sigma(pq-rt)]^2\}.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{e^{-\frac{[\Sigma 2(p+r)(1-p-r)][X-\Sigma(p+r)]^2+[2\Sigma 2(pq-rt)][X-\Sigma(p+r)][Y-\Sigma(q+r)]+[\Sigma 2(p+r)(1-p-r)][Y-\Sigma(q+r)]^2}{4\{[\Sigma(p+r)(1-p-r)][\Sigma(q+r)(1-q-r)]-[\Sigma(pq-rt)]^2\}}}}{\pi\sqrt{4\{[\Sigma(p+r)(1-p-r)][\Sigma(q+r)(1-q-r)]-[\Sigma(pq-rt)]^2\}}}\,dX\,dY.$$

Cette formule suppose la continuité, elle n'est applicable que si μ est un grand nombre.

548. La plus grande probabilité a lieu lorsque $X=\Sigma(p+r)$ et $Y=\Sigma(q+r)$. La valeur moyenne de X est $\Sigma(p+r)$, la valeur moyenne de Y est $\Sigma(q+r)$.

Les quantités $\Sigma(p+r)$ et $\Sigma(q+r)$ sont donc les valeurs normales des nombres des arrivées des événements.

Si le premier événement se produit $[\Sigma(p+r)]+x$ fois et le second $[\Sigma(q+r)]+y$ fois, on dit que les *écarts* sont x et y.

La probabilité pour que les écarts soient x et y est

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{[\sum 2(q+r)(1-q-r)]x^2+[2\sum 2(pq-r)]xy+[\sum 2(p+r)(1-p-r)]y^2}{\Delta}}\,dx\,dy.$$

On peut donner à cette quantité une forme un peu différente en introduisant dans son expression les probabilités $v_1 = p_1 + r_1$, $v_2 = p_2 + r_2$, $\ldots$, $v_\mu = p_\mu + r_\mu$, de l'événement A′ et les probabilités $w_1 = q_1 + r_1$, $w_2 = q_2 + r_2$, $\ldots$, $w_\mu = q_\mu + r_\mu$ de l'événement B′. On a alors pour valeur de la probabilité

$$\frac{e^{-\frac{x^2\sum w(1-w)+2xy\sum(vw-r)+y^2\sum v(1-v)}{2\{[\sum v(1-v)][\sum w(1-w)]-[\sum(vw-r)]^2\}}}}{2\pi\sqrt{[\sum v(1-v)][\sum w(1-w)]-[\sum(vw-r)]^2}}\,dx\,dy.$$

549. **Probabilités non uniformes du second genre.** — *Le joueur* B *possède la somme* y *et les joueurs* A *et* C *une fortune infinie; quelle est la probabilité pour que, à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie exactement, le joueur* B *soit ruiné, le joueur* A *ayant perdu la somme* x?

Désignons par $f(\mu_1, \mu_2, x, y)$ la probabilité pour que, entre les parties μ_1 et μ_2, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y, et par $\chi(0, \mu, x, y)$ la probabilité cherchée; en raisonnant comme précédemment (n° 528) on est conduit à l'équation conditionnelle

$$f(0, \mu, x, y) = \int_0^\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(0, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)\,dx_1\,d\mu_1.$$

On suppose que le jeu est symétrique et caractérisé par la fonction d'instabilité $\varphi(\mu)$; alors on a

$$f(0, \mu, x, y) = \frac{2\,e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\sqrt{3}\,\varphi(\mu)}$$

et

$$f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1) = \frac{2\,e^{-\frac{4[(x-x_1)^2+(x-x_1)(y-y_1)+(y-y_1)^2]}{3[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]}}}{\pi\sqrt{3}\,[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]}.$$

L'équation de condition est identiquement vérifiée en posant

$$\chi(0, \mu_1, x_1, y_1) = \frac{2y\,\varphi'(\mu_1)\,e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu_1)}(x_1^2+x_1y_1+y_1^2)}}{[\varphi(\mu_1)]^2\,\pi\sqrt{3}}.$$

La vérification se fait d'une façon analogue à celle du n° 529 : on intègre d'abord le second membre par rapport à x_1, puis on pose

$$\lambda^2 = \frac{(y-y_1)^2}{\varphi(\mu)}\,\frac{\varphi(\mu_1)}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}$$

et l'on est ainsi ramené à une intégrale connue.

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, et pour que, en même temps, le joueur A perde la somme x est

$$\frac{2y\,\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\sqrt{3}\,[\varphi(\mu)]^2}\,dx\,d\mu.$$

550. **Distribution des probabilités.** — *Les joueurs* A *et* C *possèdent une somme infinie et le joueur* B *possède la somme* m ; *quelle est la probabilité pour que, à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie, le joueur* A *ait perdu la somme* x *et le joueur* B *la somme* y ?

Nous supposons, comme dans le problème précédent, que le jeu est symétrique et caractérisé par la fonction d'instabilité $\varphi(\mu)$.

Si la fortune du joueur B était infinie, la probabilité cherchée aurait pour valeur

$$f(0, \mu, x, y) = \frac{2\,e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\,\varphi(\mu)\sqrt{3}}\,dx\,dy.$$

Il faut retrancher de cette quantité les probabilités relatives au cas où le joueur B est ruiné avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie. En raisonnant comme précédemment (n° 530) on voit que la possibilité de ruine du joueur B diminue la probabilité $f(0, \mu, x, y)$ de la quantité

$$\int_0^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2m\,\varphi'(\mu_1)\,e^{-\frac{4(x_1^2+x_1m+m^2)}{3\varphi(\mu_1)}}}{\pi\sqrt{3}\,[\varphi(\mu_1)]^2}\,\frac{2\,e^{-\frac{4[(x-x_1)^2+(x-x_1)(y-m)+(y-m)^2]}{3[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]}}}{\pi\sqrt{3}\,[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]}\,dx_1\,d\mu_1.$$

On obtient la valeur de cette intégrale par une méthode analogue à celle qui a été employée pour la question précédente (nº 549); une première intégration en x_1 étant effectuée, on pose

$$\lambda^2 = \frac{(m-y)^2}{\varphi(\mu)} \cdot \frac{\varphi(\mu_1)}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}$$

et l'on est ramené à une intégrale connue.

Finalement, la probabilité cherchée a pour valeur

$$\frac{2\, e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\varphi(\mu)\sqrt{3}}\, dx\, dy - \frac{2\, e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}[x^2+xy+y^2+3m(m-y)]}}{\pi\varphi(\mu)\sqrt{3}}\, dx\, dy.$$

551. **Probabilités connexes.** — Nous avons admis jusqu'à présent l'indépendance, c'est-à-dire que nous avons considéré les conditions relatives à une partie comme indépendantes des parties antérieures.

Nous allons étudier maintenant les probabilités connexes du premier genre à deux variables. Nous dirons qu'il y a connexité du premier genre quand les conditions à une partie dépendent uniquement de la perte actuelle des joueurs et du rang occupé par la partie considérée.

Nous supposerons que les fonctions d'instabilité φ_1, φ_2, φ_3 relatives aux trois joueurs sont constantes et que, pour chacun d'eux, l'espérance relative à une partie est égale au produit de sa perte actuelle par une quantité a qui peut être variable d'une partie à l'autre, mais qui, à chaque partie, est la même pour les trois joueurs.

Si, par exemple, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, les joueurs ont perdu les sommes x, y, $-(x+y)$, leurs espérances pour la partie suivante sont ax, ay, $-a(x+y)$.

Le jeu considéré est comme on voit uniforme relativement aux fonctions d'instabilité, mais non relativement aux espérances.

Le jeu étant ainsi défini, une analyse analogue à celle du nº 300 mais plus laborieuse conduit au résultat suivant :

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la

somme x et le joueur B *la somme y est*

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{\varphi_2 x^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)xy + \varphi_1 y^2}{\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}\,F(\mu)}}}{F(\mu)}\,dx\,dy.$$

$F(\mu)$ *étant l'intégrale de l'équation différentielle*

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + 2a\,F = \sqrt{2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2}.$$

Si, en particulier, a est constant, on a

$$F = \frac{\sqrt{2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2}}{2a}(1 - e^{-2a\mu}).$$

Nous appliquerons ce résultat à la solution approchée du problème suivant :

552. *D'une urne qui contient m boules blanches, n boules noires et k boules rouges, on extrait successivement μ boules sans les replacer dans l'urne. Quelle est la probabilité d'une composition donnée de l'urne?*

Si, en μ tirages, il sort $\frac{\mu m}{m+n+k}+x$ boules blanches, $\frac{\mu n}{m+n+k}+y$ boules noire est $\frac{\mu k}{m+n+k}-x-y$ boules rouges, nous disons que les écarts sont x et y. La question posée consiste à chercher la probabilité pour que les écarts soient x et y en μ épreuves.

Supposons que trois joueurs A, B, C perdent, à chaque partie, des sommes respectivement égales aux accroissements des écarts x, y, $-(x+y)$ au tirage correspondant. Supposons encore que μ tirages aient été effectués et que les écarts soient x et y.

Au tirage suivant, il y a probabilité

$$\frac{(s-\mu)m - sx}{s(s-\mu)}$$

(s désignant la somme $m+n+k$) pour qu'il sorte une blanche et par suite pour que l'écart x augmente de la quantité $\frac{s-m}{s}\cdot$

Il y a de même probabilité

$$\frac{(s-m)(s-\mu)+sx}{s(s-\mu)}$$

pour qu'il ne sorte pas une blanche et par suite que l'écart x diminue de $\frac{m}{s}$.

L'espérance mathématique du joueur A pour le tirage considéré est donc $\frac{x}{s-\mu}$.

L'espérance mathématique du joueur B est de même $\frac{y}{s-\mu}$.

Les espérances mathématiques des joueurs A et B sont donc constamment proportionnelles à leur perte totale et la quantité précédemment désignée par a est $\frac{1}{s-\mu}$.

La fonction d'instabilité relative au joueur A a pour valeur

$$\varphi_1 = 2\left[\frac{m(s-\mu)(s-m)+xs^2(2s-m)}{s^2(s-\mu)} - \frac{x^2}{(s-\mu)^2}\right].$$

Si les probabilités de sortie des boules étaient constantes, les écarts x et y seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ (n° 525), et par suite ils seraient négligeables comparativement à μ. Il en est de même à plus forte raison dans le cas actuel, puisque les écarts ont une tendance à diminuer d'autant plus grande que ces écarts sont plus grands eux-mêmes; x et y sont donc négligeables comparativement à μ et par suite comparativement à m, n, k qui sont de grands nombres supposés du même ordre que μ.

La fonction d'instabilité relative au joueur A se réduit donc, en négligeant x, à la quantité

$$\varphi_1 = \frac{2m(s-m)}{s^2}.$$

Les fonctions φ_2 et φ_3 ont de même pour valeurs

$$\varphi_2 = \frac{2n(s-n)}{s^2}, \qquad \varphi_3 = \frac{2k(s-k)}{s^2}.$$

Les fonctions d'instabilité étant constantes et les espérances étant

proportionnelles aux pertes actuelles, on peut appliquer au problème dont il s'agit la formule du n° 551. La fonction $F(\mu)$ est l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + 2aF = \sqrt{2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2},$$

c'est-à-dire, pour le cas actuel,

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + \frac{2F}{s-\mu} = 4\sqrt{\frac{mnk}{s^3}}.$$

On a donc

$$F(\mu) = 4\sqrt{\frac{mnk}{s^3}}\,\frac{\mu(s-\mu)}{s}.$$

La probabilité pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y, c'est-à-dire *la probabilité pour que les écarts soient x et y, a pour expression*

$$\frac{s^2\sqrt{s}\,e^{-\frac{[n(s-n)x^2+2mnxy+m(s-m)y^2]s^2}{2mnk\mu(s-\mu)}}}{2\pi\sqrt{mnk}\,\mu(s-\mu)}\,dx\,dy.$$

Si l'on désigne par p, q, r les quantités $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$, $\frac{k}{s}$, l'expression ci-dessus s'écrit

$$\frac{s\,e^{-\frac{q(1-q)x^2+2pqxy+p(1-p)y^2}{2pqr}\,\frac{s}{\mu(s-\mu)}}}{2\pi\mu\sqrt{pqr}\,(s-\mu)}\,dx\,dy.$$

En comparant ce résultat à celui qui a été obtenu au n° 525 et qui serait relatif au cas où l'on remplacerait les boules dans l'urne après chaque tirage, on voit que les écarts sont diminués dans le rapport de $\sqrt{s-\mu}$ à $\sqrt{s}$.

553. Reprenons la question relative aux joueurs (n° 551) : Si l'on suppose que, μ_1 parties ayant été jouées, les joueurs A et B aient perdu les sommes x_1 et y_1, quelle est la probabilité pour que ces joueurs perdent en tout les sommes x et y après une nouvelle série de μ parties ?

Pour résoudre ce problème (pour lequel nous supposons la quantité a constante), nous écrirons de deux façons différentes la proba-

bilité pour que les joueurs A et B aient perdu les sommes x et y en $\mu_1 + \mu$ parties.

Cette probabilité a pour valeur

$$f(\mu_1 + \mu, 0, 0, x, y) = \frac{4a\, e^{-8a \frac{\varphi_2 x^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) xy + \varphi_1 y^2}{(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)[1 - e^{-2a(\mu_1+\mu)}]}}}{\pi\sqrt{(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)[1 - e^{-2a(\mu_1+\mu)}]}}.$$

Soit $f(\mu, x_1, y_1, x, y)$ la probabilité cherchée; la probabilité pour que, en μ_1 parties, les pertes soient x_1 et y_1 et pour qu'elles deviennent ensuite x et y après les μ parties suivantes est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{4a\, e^{-8a \frac{\varphi_2 x_1^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) x_1 y_1 + \varphi_1 y_1^2}{(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)[1 - e^{-2a\mu_1}]}}}{\pi\sqrt{(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)[1 - e^{-2a\mu_1}]}} f(\mu, x_1, y_1, x, y).$$

En intégrant cette expression pour toutes les valeurs de x_1, y_1 on obtient, d'après le principe de la probabilité totale, la probabilité pour que les pertes soient x et y en $\mu_1 + \mu$ parties; on doit donc avoir

$$f(\mu_1 + \mu, 0, 0, x, y)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4a\, e^{-8a \frac{\varphi_2 x_1^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) x_1 y_1 + \varphi_1 y_1^2}{(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)[1 - e^{-2a\mu_1}]}}}{\pi\sqrt{(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)[1 - e^{-2a\mu_1}]}} f(\mu, x_1, y_1, x, y)\, dx_1\, dy_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f.

Cette équation est satisfaite identiquement si l'on pose

$$f(\mu, x_1, y_1, x, y)$$
$$= \frac{4a\, e^{-8a \frac{\varphi_2 (x - x_1 e^{-a\mu})^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)(x - x_1 e^{-a\mu})(y - y_1 e^{-a\mu}) + \varphi_1 (y - y_1 e^{-a\mu})^2}{(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)[1 - e^{-2a\mu}]}}}{\pi\sqrt{(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)[1 - e^{-2a\mu}]}}.$$

Telle est l'expression de la probabilité cherchée.

554. *L'urne* A *contient* m *boules blanches,* n *boules noires et* k *boules rouges; l'urne* B *contient* m' *boules blanches,* n' *boules noires et* k' *boules rouges. A chaque épreuve, on tire en même temps une boule de* A *qu'on*

place dans B *et une boule de* B *qu'on place dans* A. *Quelle est la probabilité pour que, après μ épreuves, les urnes aient une composition donnée?*

Désignons par s la somme $m+n+k+m'+n'+k'$ de toutes les boules; nous disons que les écarts sont x et y quand il y a

$$\frac{(m+m')(m+n+k)}{s}+x$$

boules blanches dans l'urne A et

$$\frac{(n+n')(m+n+k)}{s}+y$$

boules noires dans l'urne A.

La question peut s'énoncer ainsi : Les écarts ayant initialement des valeurs données x_1, y_1, quelle est la probabilité pour que leurs valeurs soient x et y après μ épreuves?

Si les écarts sont x et y, il y a

$$\frac{(k+k')(m+n+k)}{s}-x-y$$

boules rouges dans l'urne A; de même dans l'urne B, les nombres des boules blanches, noires et rouges sont respectivement

$$\frac{(m+m')(m'+n'+k')}{s}-x, \qquad \frac{(n+n')(m'+n'+k')}{s}-y,$$
$$\frac{(k+k')(m'+n'+k')}{s}+x+y.$$

Supposons que trois joueurs H, K, L perdent, à chaque partie, des sommes respectivement égales aux accroissements des écarts x, y, $-x-y$, au tirage correspondant et supposons que les écarts soient x et y.

Au prochain tirage, il y a probabilité

$$\frac{(m+m')(m+n+k)+xs}{s^2(m+n+k)(m'+n'+k')}\left[(n+n'+k+k')(m'+n'+k')+xs\right]$$

pour que l'écart x diminue de un.

Il y a de même probabilité

$$\frac{(m+m')(m'+n'+k')-xs}{s^2(m+n+k)(m'+n'+k')}[(n+n'+k+k')(m+n+k)-xs]$$

pour que l'écart x augmente de un.

L'espérance mathématique du joueur H pour le prochain tirage est donc

$$\frac{sx}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Celle du joueur K est de même

$$\frac{sy}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Ces espérances sont proportionnelles à x et à y et la quantité précédemment désignée par a a pour valeur

$$a=\frac{s}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Nous supposerons que m, n, k, m', n', k' sont de très grands nombres auprès desquels les écarts initiaux

$$x_1=\frac{mn'-m'n+mk'-m'k}{s}$$

et

$$y_1=\frac{nk'-n'k+nm'-n'm}{s}$$

sont négligeables. Les écarts x et y seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ (que nous supposons de l'ordre de $\sqrt{m}, \sqrt{n}, \ldots$) si aucune cause retardatrice ne tendait à en diminuer l'amplitude; ils seraient donc négligeables comparativement à $m, n, \ldots$. Dans le cas actuel ces écarts sont à plus forte raison négligeables comparativement à $m, n, \ldots$ et, en les négligeant dans l'expression de la fonction d'instabilité relative au joueur H, celle-ci a pour valeur

$$\varphi_1=\frac{4(m+m')(n+n'+k+k')}{s^2};$$

on a de même

$$\varphi_2=\frac{4(n+n')(k+k'+m+m')}{s^2}, \qquad \varphi_3=\frac{4(k+k')(m+m'+n+n')}{s^2}.$$

Les espérances mathématiques des joueurs étant constamment proportionnelles à leurs pertes et les fonctions d'instabilité étant constantes, la probabilité pour que les joueurs H et K perdent finalement les sommes x et y ou, en d'autres termes, la probabilité pour que les écarts ayant initialement les valeurs x_1 et y_1 prennent les valeurs x et y après μ épreuves est donnée par la dernière formule du n° 553 dans laquelle on doit remplacer les quantités x_1, y_1, a, φ_1, φ_2, φ_3 par les valeurs que nous venons d'obtenir.

555. Dans certains cas il est possible d'obtenir l'expression des probabilités quoique les espérances relatives à chacun des joueurs ne soient pas proportionnelles à leurs pertes actuelles.

Nous supposerons que pour les trois joueurs A, B, C la fonction d'instabilité ait une valeur constante φ_1, et que, ces joueurs ayant perdu les sommes x, y, $-(x+y)$, leurs espérances pour la partie suivante soient respectivement $2ax+ay$, $ay-ax$ et $-ax-2ay$; a étant constante.

Dans ces conditions, une analyse analogue à celle du n° 551 conduit au résultat suivant :

La probabilité pour que, après μ parties, le joueur A *ait perdu la somme x et le joueur* B *la somme y est exprimée par la formule*

$$\frac{2\sqrt{3}\,a\,e^{-\frac{4a(x^2+xy+y^2)}{\varphi_1(1-e^{-3a\mu})}}}{\pi\varphi_1(1-e^{-3a\mu})}\,dx\,dy.$$

556. *Trois urnes* A, B, C *contiennent chacune m boules blanches et m boules noires ; chaque épreuve consiste à tirer une boule de* A *pour la placer dans* B, *en même temps qu'à tirer une boule de* B *pour la placer dans* C, *en même temps qu'à tirer une boule de* C *pour la placer dans* A. *Quelle est la probabilité d'une composition donnée des urnes après μ épreuves ?*

Nous dirons que les écarts sont x et y s'il y a $m+x$ boules blanches dans l'urne A et $m+y$ boules blanches dans l'urne B.

Si les écarts sont x et y, il y a $m-x$ boules noires dans l'urne A, $m-y$ boules noires dans l'urne B, $m-x-y$ boules blanches dans l'urne C et $m+x+y$ boules noires dans l'urne C.

Supposons que trois joueurs H, K, L perdent, à chaque partie, des sommes respectivement égales aux accroissements des écarts, au triple tirage correspondant, et supposons que ces écarts soient x, y et $-(x+y)$.

A la prochaine épreuve, il y a probabilité

$$\frac{m-x}{2m}\,\frac{m-x-y}{2m}$$

pour que x augmente de un, et probabilité

$$\frac{m+x}{2m}\,\frac{m+x+y}{2m}$$

pour que x diminue de un.

L'espérance mathématique du joueur H est donc, pour l'épreuve considérée,

$$\frac{2x+y}{2m}.$$

A cette même épreuve il y a probabilité

$$\frac{m-y}{2m}\,\frac{m+x}{2m}$$

pour que y augmente de un, et probabilité

$$\frac{m+y}{2m}\,\frac{m-x}{2m}$$

pour que y diminue de un; l'espérance mathématique du joueur K est donc

$$\frac{y-x}{2m}.$$

La fonction d'instabilité relative au joueur H est, pour l'épreuve considérée,

$$\frac{2m^2-2x^2-2xy-y^2}{2m^2}.$$

Nous supposons que m est un grand nombre et que μ est également un grand nombre du même ordre. S'il n'existait aucune cause retardatrice des écarts, ceux-ci seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ (n° 525) et par

suite ils seraient négligeables comparativement à μ ou à m, et à plus forte raison, leurs carrés ou produits seraient négligeables comparativement à μ^2 ou m^2.

Puisque, dans le cas actuel, il existe une cause retardatrice des écarts, on peut à plus forte raison négliger x^2, xy et y^2 comparativement à m^2.

La fonction d'instabilité φ_1 relative au joueur H se réduit donc à un. Il en est de même des fonctions d'instabilité φ_2, φ_3, relatives aux joueurs K et L.

Le problème actuel rentre dans le cas traité au n° 555, car les trois fonctions d'instabilité sont égales et constantes et les espérances mathématiques suivent la loi exigée. La probabilité pour que le joueur H perde la somme x et le joueur K la somme y, c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts soient x et y, est

$$\frac{\sqrt{3}\, e^{-\frac{2(x^2+xy+y^2)}{m\left(1-e^{-\frac{3\mu}{2m}}\right)}}}{m\pi\left(1-e^{-\frac{3\mu}{2m}}\right)}\,dx\,dy.$$

CHAPITRE XVIII.

PROBABILITÉS CONTINUES A PLUSIEURS VARIABLES.

---

557. *Les joueurs* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *qui possèdent chacun une fortune infinie doivent jouer* μ *parties; quelle est la probabilité pour que le joueur* A_1 *perde la somme* x_1, *le joueur* A_2 *la somme* $x_2, \ldots,$ *le joueur* A_{n-1} *la somme* x_{n-1}?

Nous supposons que les conditions du jeu pour une partie sont indépendantes des résultats antérieurs du jeu ; nous admettons, en d'autres termes, l'indépendance; alors la probabilité pour que, entre les parties μ_1 et μ, le joueur A_1 perde la somme $x_1 - X_1$, le joueur A_2 la somme $x_2 - X_2, \ldots,$ le joueur A_{n-1} la somme $x_{n-1} - X_{n-1}$, ne dépend que des quantités $\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1}$ et peut se représenter par

$$f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1}). \tag{1}$$

Si nous supposions que les conditions du jeu soient les mêmes à chaque partie; si, en d'autres termes, nous supposions le jeu uniforme, f ne dépendrait pas séparément de μ_1 et de μ, mais seulement de la différence $\mu - \mu_1$. Dans la suite de cette étude, nous ne supposerons pas l'uniformité.

La probabilité pour que, en μ_1 parties, le joueur A_1 perde la somme X_1, le joueur A_2 la somme $X_2, \ldots,$ le joueur A_{n-1} la somme X_{n-1}, est

$$f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \tag{2}$$

(μ_0 est nul).

La probabilité pour que, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu x_1, le joueur A_2, $x_2, \ldots,$ le joueur A_{n-1}, x_{n-1}, est

$$f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{3}$$

La probabilité pour que les joueurs $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ aient perdu les sommes $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie et finalement les sommes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'obtient, d'après le principe des probabilités composées, en multipliant la probabilité (2) par la probabilité (1) :

$$f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})\, f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1}).$$

En sommant toutes les expressions analogues pour toutes les valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, on obtient, d'après le principe des probabilités totales, la probabilité

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \\ \times f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1})\, dX_1\, dX_2 \ldots dX_{n-1}$$

pour que finalement, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu x_1, le joueur A_2, x_2, ...

Cette probabilité s'exprime également par (3); on doit donc avoir

$$f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \\ \times f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1})\, dX_1\, dX_2 \ldots dX_{n-1}.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f; elle doit être vérifiée quels que soient μ_1 et μ.

Lorsque l'intervalle $\mu - \mu_1$ tend vers zéro, la probabilité pour que les écarts $x_1 - X_1 = u_1$, $x_2 - X_2 = u_2$, ..., $x_{n-1} - X_{n-1} = u_{n-1}$ correspondant à cet intervalle soient compris entre des limites données, $-\alpha_1$, α_2, $-\beta_1$, β_2, ..., $-\gamma_1$, γ_2, doit tendre vers un; on doit donc avoir

$$\lim \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{-\beta_1}^{\beta_2}\cdots\int_{-\gamma_1}^{\gamma_2} f(\mu_1, \mu, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1} = 1 \\ \text{pour} \quad \mu - \mu_1 = 0$$

quelque petites que soient les quantités positives (et fixes) α_1, α_2, β_1, ..., γ_2.

Ces deux équations de condition suffisent pour déterminer la fonction f, par suite de la continuité de la variable μ.

558. Nous supposerons que $\mu - \mu_1$ est un infiniment petit $\Delta\mu$, de sorte que $\mu_1 = \mu - \Delta\mu$, et nous désignerons par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ les quantités $x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1}$; la première équation de condition deviendra alors

$$\begin{aligned} & f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_0, \mu - \Delta\mu, x_1 - u_1, x_2 - u_2, \ldots, x_{n-1} - u_{n-1}) \\ & \quad \times f(\mu - \Delta\mu, \mu, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}. \end{aligned}$$

Développons la première fonction f par la formule de Taylor en négligeant les termes qui contiennent en facteur le carré de $\Delta\mu$ qui est du second ordre et, pour simplifier l'écriture, remplaçons par F la quantité

$$f(\mu - \Delta\mu, \mu, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1});$$

l'équation devient

$$\begin{aligned} & f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ & = f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} \\ & \quad - \Delta\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} \\ & \quad - \frac{\partial f}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} - \ldots \\ & \quad - \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_{n-1} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} \\ & \quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \ldots \\ & \quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 u_2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

plus des termes contenant des dérivées troisièmes, par exemple

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\, \partial x_2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 u_2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}$$

et des termes contenant des dérivées d'ordres supérieurs.

559. On a d'abord

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} = 1,$$

égalité qui supprime les deux premiers termes de la dernière équation.

Le second terme du second membre de la dernière équation se réduit à

$$-\frac{\partial f}{\partial \mu}\, d\mu.$$

La continuité supposée de la variable μ permet de prendre $\Delta\mu$ aussi petit qu'on veut, de sorte que les valeurs moyennes des quantités telles que $u_1^2 u_2$ qui multiplient les dérivées du troisième ordre soient infiniment petites.

Nous ne supposerons pas que le jeu est uniforme, mais nous supposerons qu'il est équitable; alors les intégrales qui multiplient les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\cdots$ sont nulles et l'équation se réduit à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_1^2\, \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}\\
+&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_2^2\, \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \ldots\\
+&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_{n-1}^2\, \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}\\
+&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_1\, u_2\, \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \ldots\\
+&\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-2}\,\partial x_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_{n-2}\, u_{n-1}\, \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \mu}\, d\mu.
\end{aligned}$$

560. **Cas où il y a symétrie.** — Lorsqu'il y a symétrie, c'est-à-dire lorsque les conditions du jeu sont les mêmes pour tous les joueurs, l'équation se réduit à

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2}\right]\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^2\, \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}\\
+&\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-2}\,\partial x_{n-1}}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_i u_j\, \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \mu}\, d\mu.
\end{aligned}$$

La quantité

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^2 F\, du_1 \ldots du_{n-1}$$

est la valeur moyenne des carrés des pertes d'un des joueurs relativement à l'intervalle $\mu - d\mu$, μ.

Nous désignerons par $\varphi'(\mu)\, d\mu$ le double de cette valeur moyenne et nous appellerons $\varphi'(\mu)\, d\mu$ la fonction d'instabilité relative à l'intervalle $\mu - d\mu$, μ.

$\varphi'(\mu)\, d\mu$ est une fonction donnée (nécessairement positive) qui définit le jeu dans l'intervalle $\mu - d\mu$, μ ou si l'on veut à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_i u_j F\, du_1 \ldots du_{n-1},$$

elle exprime la valeur moyenne du produit $u_i u_j$ relativement à l'intervalle $\mu - d\mu$, μ. Il est facile de l'exprimer à l'aide de la fonction d'instabilité : La somme des pertes de tous les joueurs est nécessairement nulle ; on a donc

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0,$$

d'où

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n)^2 = 0,$$

c'est-à-dire, en désignant par $\text{VM}\,x$ la valeur moyenne de x,

$$\begin{aligned}&\text{VM}\,x_1^2 + \text{VM}\,x_2^2 + \ldots + \text{VM}\,x_n^2 \\ &+ 2\,\text{VM}\,x_1x_2 + 2\,\text{VM}\,x_1x_3 + \ldots + 2\,\text{VM}\,x_{n-1}x_n = 0.\end{aligned}$$

Par suite de la symétrie, tous les termes de la première ligne en nombre n sont égaux entre eux.

Pour la même raison, les $\frac{n(n-1)}{2}$ termes de la seconde ligne sont égaux entre eux, de sorte que l'égalité précédente se réduit à

$$n\,\text{VM}\,x_i^2 + n(n-1)\,\text{VM}\,x_i x_j = 0,$$

d'où

$$\text{VM}\,x_i x_j = -\frac{\text{VM}\,x_i^2}{n-1} = -\frac{\varphi'(\mu)\, d\mu}{2(n-1)}.$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_i u_j \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} = -\frac{\varphi'(\mu)\, d\mu}{2(n-1)}.$$

561. La probabilité doit donc satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2}$$
$$-\frac{2}{n-1}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_3}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-2}\,\partial x_{n-1}}\right]-\frac{4}{\varphi'(\mu)}\frac{\partial f}{\partial \mu}=0.$$

On vérifie sans difficulté que l'équation aux dérivées partielles est satisfaite identiquement si l'on pose

$$f=\frac{\sqrt{n}\, e^{-\frac{2(n-1)}{n\varphi(\mu)}\left[\Sigma x_i^2+\Sigma x_i x_j\right]}}{\left[\sqrt{\frac{\pi n \varphi(\mu)}{n-1}}\right]^{n-1}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Telle est l'expression de la probabilité.

$\varphi(\mu)$ est la fonction dont la dérivée est $\varphi'(\mu)$; c'est la fonction d'instabilité relative à l'intervalle zéro, μ.

562. **Cas général.** — Supposons maintenant que le jeu soit équitable, mais non symétrique; l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}$$

exprime la valeur moyenne du carré de la perte du joueur A_i dans l'intervalle $\mu - d\mu$, μ; c'est la moitié de la fonction d'instabilité relative à ce joueur.

Si l'on désigne par $\varphi_i(\mu)$ cette fonction d'instabilité (qui constitue l'une des données du problème) pour l'intervalle zéro, μ, l'intégrale précédente est la moitié de la différentielle $\varphi_i'(\mu)\, d\mu$.

Pour alléger les formules, nous écrirons souvent φ_1, φ_2, ... au lieu de $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, ... Les quantités φ_1, φ_2, ... dans ce qui suivra ne seront pas de simples coefficients comme dans les cas considérés au Chapitre précédent; ce seront des fonctions données de μ.

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_i u_j \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}$$

exprime la valeur moyenne du produit $u_i u_j$ des pertes des joueurs A_i, A_j dans l'intervalle $\mu - d\mu$, μ et constitue une donnée du problème.

Les valeurs moyennes des produits tels que $x_1 x_2$ jouissent de la propriété d'addition comme $\mathrm{VM}x_1^2$ ou $\frac{1}{2}\varphi_1(\mu)$, de sorte qu'il suffit d'additionner les valeurs moyennes relatives aux diverses parties considérées isolément pour obtenir la valeur moyenne de leur ensemble.

En particulier, si le jeu est uniforme, la valeur moyenne de $x_1 x_2$ pour μ parties est égale au produit par μ de la valeur moyenne de $x_1 x_2$ pour une partie.

On peut supposer que les joueurs A_3, A_4, ..., A_n, tout en continuant à jouer séparément, associent leurs gains et leurs pertes; cela ne change rien aux jeux de A_1 et A_2, mais on peut alors considérer le jeu comme composé de trois joueurs : les joueurs A_1, A_2 et l'association des autres.

Soit $\Phi(\mu)$ la fonction d'instabilité, qui correspond à l'association; le jeu étant réduit à trois joueurs, la valeur moyenne de $x_1 x_2$ s'exprime facilement par les fonctions d'instabilité.

Désignons par z la perte de l'association des joueurs $A_3 \ldots A_n$; on a évidemment

$$x_1 + x_2 + z = 0,$$

d'où

$$z^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$$

et

$$\mathrm{VM}z^2 = \mathrm{VM}x_1^2 + \mathrm{VM}x_2^2 + 2\,\mathrm{VM}x_1 x_2,$$

par conséquent

$$\mathrm{VM}x_1 x_2 = \frac{\mathrm{VM}z^2 - \mathrm{VM}x_1^2 - \mathrm{VM}x_2^2}{2} = \frac{\Phi(\mu) - \varphi_1(\mu) - \varphi_2(\mu)}{4}.$$

La valeur moyenne de $x_1 x_2$, somme de trois fonctions d'instabilité, possède donc comme celles-ci la propriété d'addition et par suite peut se déduire immédiatement des données.

Supposons que le jeu soit continu et que la valeur moyenne de $x_1 x_2$ soit une fonction donnée $\frac{1}{2}\chi_{1,2}(\mu)$ de la variable μ; la valeur moyenne

de $u_1 u_2$ dans l'intervalle $\mu - d\mu$, μ est alors la différentielle $\frac{1}{2}\chi_{1.2}(\mu)\,d\mu$, et l'on a

$$\frac{1}{2}\chi_{1.2}(\mu)\,d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 u_2 \mathrm{F}\,du_1 \ldots du_{n-1}.$$

Si, dans l'équation finale du n° 559, on remplace les valeurs moyennes par leurs expressions, on obtient *l'équation aux dérivées partielles de la probabilité*.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\varphi'_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &+ \frac{1}{4}\varphi'_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{1}{4}\varphi'_{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2} \\ &+ \frac{1}{2}\chi'_{1.2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{1}{2}\chi'_{1,3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_3} + \ldots + \frac{1}{2}\chi'_{n-2,n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-2}\,\partial x_{n-1}} = \frac{\partial f}{\partial \mu}.\end{aligned}$$

563. Cette équation convient encore pour le cas où le jeu n'est pas équitable, à la condition de modifier le sens attribué aux lettres x, φ, χ.

Lorsque le jeu n'est pas équitable, x_i ne désigne plus la perte du joueur A_i, mais cette perte augmentée de l'espérance mathématique $\psi_i(\mu)$ de ce joueur.

La quantité $\varphi_i(\mu)$ est la fonction d'instabilité relative au joueur A_i; c'est, dans le cas du jeu non équitable, le double de la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes diminué du double du carré de la valeur moyenne des gains, c'est-à-dire diminué de la quantité $2\psi_i^2(\mu)$.

Lorsque le jeu n'est pas équitable, $\chi_{1,2}(\mu)$ ne désigne plus le double de la valeur moyenne du produit des pertes des joueurs A_1 et A_2 mais le double de cette valeur moyenne diminué du double produit des espérances $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$ de ces joueurs. Cette quantité $\chi_{1,2}(\mu)$ jouit de la propriété d'addition : on le démontre sans difficulté en supposant comme précédemment que tous les joueurs, sauf deux, associent leurs gains et leurs pertes.

Les quantités x, φ, χ étant ainsi définies, il suffit de considérer le cas du jeu équitable ; l'équation ci-dessus convient dans tous les cas où il y a indépendance, et, pour employer les mêmes termes que dans la théorie du rayonnement, on peut dire qu'elle est *l'équation générale du mouvement de la probabilité*.

564. La probabilité pour que, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu

la somme x_1, le joueur A_2, la somme x_2, ..., le joueur A_{n-1}, la somme x_{n-1} est donnée par l'expression

$$\frac{e^{\frac{\Sigma a_k x_k^2 + 2\Sigma b_{h,l} x_h x_l}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{\Delta}} dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Telle est la formule fondamentale des probabilités à plusieurs variables.

La lettre Δ désigne le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & -\chi_{1,4} & \ldots & \pm\chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \chi_{2,4} & \ldots & \mp\chi_{2,n-1} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & -\chi_{3,4} & \ldots & \pm\chi_{3,n-1} \\ -\chi_{4,1} & \chi_{4,2} & -\chi_{4,3} & \varphi_4 & \ldots & \mp\chi_{4,n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \pm\chi_{n-1,1} & \mp\chi_{n-1,2} & \pm\chi_{n-1,3} & \mp\chi_{n-1,4} & \ldots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Dans les quantités χ on peut permuter les indices; nous avons écrit par exemple, pour conserver la symétrie $\chi_{2,1}$ au lieu de $\chi_{1,2}$.

La somme $\Sigma\, a_k x_k^2$ désigne la quantité

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^2.$$

La quantité a_k s'obtient en supprimant, dans le déterminant Δ, la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

La somme $\Sigma\, b_{h,l}\, x_h\, x_l$ désigne la quantité

$$b_{1,2}x_1x_2 + b_{1,3}x_1x_3 + \ldots + b_{1,n-1}x_1x_{n-1} + b_{2,3}x_2x_3 + \ldots + b_{n-2,n-1}x_{n-2}x_{n-1}.$$

La quantité $b_{h,l}$ s'obtient en supprimant, dans le déterminant Δ, la $h^{\text{ième}}$ ligne et la $l^{\text{ième}}$ colonne.

565. Supposons, par exemple, qu'il y ait quatre joueurs; la probabilité pour que, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu la somme x_1, le joueur A_2 la somme x_2 et le joueur A_3 la somme x_3 est, d'après la

formule précédente,

$$\frac{e^{-\frac{(\varphi_2\varphi_3-\chi_{2,3}^2)x_1^2+(\varphi_3\varphi_1-\chi_{1,3}^2)x_2^2+(\varphi_1\varphi_2-\chi_{1,2}^2)x_3^2+2(\chi_{2,3}\chi_{1,3}-\varphi_1\chi_{1,2})x_1x_2+2(\chi_{1,2}\chi_{2,3}-\varphi_2\chi_{1,3})x_1x_3+2(\chi_{1,2}\chi_{1,3}-\varphi_1\chi_{2,3})x_2x_3}{\varphi_1\varphi_2\varphi_3-\varphi_1\chi_{2,3}^2-\varphi_2\chi_{1,3}^2-\varphi_3\chi_{1,2}^2+2\chi_{2,3}\chi_{1,3}\chi_{1,2}}}}{\pi\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1\varphi_2\varphi_3-\varphi_1\chi_{2,3}^2-\varphi_2\chi_{1,3}^2-\varphi_3\chi_{1,2}^2+2\chi_{2,3}\chi_{1,3}\chi_{1,2}}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

566. Lorsqu'il y a trois joueurs, A_1, A_2, A_3, la probabilité pour que le joueur A_1 perde la somme x_1 et le joueur A_2 la somme x_2 est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{\varphi_2 x_1^2+\varphi_1 x_2^2-2\chi x_1 x_2}{\varphi_1\varphi_2-\chi^2}}}{\pi\sqrt{\varphi_1\varphi_2-\chi^2}}\,dx_1\,dx_2.$$

Cette formule est identique à celle du n° 544 qui renferme, au lieu de la fonction χ, la fonction d'instabilité φ_3 relative au jeu de A_3. On a, en effet,

$$x_1+x_2+x_3=0$$

ou

$$x_1+x_2=-x_3.$$

En élevant au carré les deux membres de cette égalité, on obtient

$$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=x_3^2,$$

et, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\text{VM}x_1^2+\text{VM}x_2^2+2\,\text{VM}x_1x_2=\text{VM}x_3^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\varphi_2}{2}+\chi=\frac{\varphi_3}{2}$$

ou enfin

$$\chi=-\frac{\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3}{2}.$$

Si l'on remplace χ par cette valeur dans la formule précédente, on retrouve celle du n° 544.

567. Il nous reste à prouver que la formule générale de la probabi-

lité vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{4}\sum \varphi'_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sum \chi'_{1,2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Posons

$$f = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{\Delta}} = \frac{e^{-\frac{\sum a_i x_i^2 + 2\sum b_{h,i} x_h x_i}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{\Delta}},$$

où

$$\lambda = a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^2 + 2 b_{1,2} x_1 x_2 + \ldots + 2 b_{n-2,n-1} x_{n-2} x_{n-1};$$

l'équation à vérifier devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[\varphi'_1\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\right)^2 + \varphi'_2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \varphi'_{n-1}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}}\right)^2\right]\\
&+ \frac{1}{2}\left[\chi'_{1,2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \chi'_{1,3}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_3} + \ldots + \chi'_{n-2,n-1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-2}}\frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}}\right]\\
&- \frac{1}{2}\Delta\left[a_1\varphi'_1 + a_2\varphi'_2 + \ldots + a_{n-1}\varphi'_{n-1} + 2\chi'_{1,2}b_{1,2} + 2\chi'_{1,3}b_{1,3} + \ldots + 2\chi'_{n-2,n-1}b_{n-2,n-1}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\Delta\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} - \Delta\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \lambda\frac{\partial \Delta}{\partial \mu}.
\end{aligned}$$

Les deux premiers crochets du premier membre et les deux derniers termes du second membre contiennent des expressions en x_1^2, ..., x_{n-1}^2, $x_1 x_2$, ...

Au contraire, le dernier crochet du premier membre et le premier terme du second dépendent exclusivement de μ.

Pour démontrer la formule, il faut :

1° Prouver que les termes indépendants des x sont égaux dans les deux membres;

2° Prouver que les coefficients d'un terme quelconque en x, par exemple du terme en x_1^2, sont identiques dans les deux membres.

568. La première condition consiste à vérifier qu'on a

$$(1)\qquad \begin{aligned}
&a_1\varphi'_1 + a_2\varphi'_2 + \ldots + a_{n-1}\varphi'_{n-1}\\
&\quad + 2\left[b_{1,2}\chi'_{1,2} + b_{1,3}\chi'_{1,3} + \ldots + b_{n-2,n-1}\chi'_{n-2,n-1}\right] = \frac{\partial \Delta}{\partial \mu}.
\end{aligned}$$

D'après la règle de la dérivation des déterminants,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\mu} = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & -\chi'_{1.2} & \chi'_{1.3} & \dots & \pm\chi'_{1,n-1} \\ -\chi_{2.1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \dots & \mp\chi_{2,n-1} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & \dots & \pm\chi_{3.n-1} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \pm\chi_{n-1,1} & \mp\chi_{n-1,2} & \pm\chi_{n-1,3} & \dots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1.2} & \chi_{1,3} & \dots & \pm\chi_{1,n-1} \\ -\chi'_{2.1} & \varphi'_2 & -\chi'_{2.3} & \dots & \mp\chi'_{2.n-1} \\ \chi_{3.1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & \dots & \pm\chi_{3,n-1} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \pm\chi_{n-1.1} & \mp\chi_{n-1,2} & \pm\chi_{n-1,3} & \dots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1.3} & \dots & \pm\chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2.1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \dots & \mp\chi_{2.n-1} \\ \chi'_{3.1} & -\chi'_{3.2} & \varphi'_3 & \dots & \pm\chi'_{3,n-1} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \pm\chi_{n-1,1} & \mp\chi_{n-1.2} & \pm\chi_{n-1.3} & \dots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \dots & \pm\chi_{1.n-1} \\ -\chi_{2.1} & \varphi_2 & -\chi_{2.3} & \dots & \mp\chi_{2.n-1} \\ \chi_{3.1} & -\chi_{3.2} & \varphi_3 & \dots & \pm\chi_{3,n-1} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \pm\chi'_{n-1.1} & \mp\chi'_{n-1.2} & \pm\chi'_{n-1.3} & \dots & \varphi'_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant a pour valeur, d'après la définition des quantités a et b,

$$a_1\varphi'_1 + b_{1.2}\chi'_{1.2} + b_{1.3}\chi'_{1,3} + b_{1,4}\chi'_{1.4} + \dots + b_{1,n-1}\chi'_{1.n-1}.$$

Le second déterminant a pour valeur

$$b_{2.1}\chi'_{2.1} + a_2\varphi'_2 + b_{2,3}\chi'_{2,3} + \dots + b_{2.n-1}\chi'_{2.n-1}.$$

le troisième a pour valeur

$$b_{3.1}\chi'_{3,1} + b_{3.2}\chi'_{3.2} + a_3\varphi'_3 + \dots + b_{3.n-1}\chi'_{3.n-1}.$$

le $(n-1)^{\text{ième}}$ a pour valeur

$$b_{n-1,1}\chi'_{n-1,1} + b_{n-1,2}\chi'_{n-1,2} + b_{n-1,3}\chi'_{n-1,3} + \dots + a_{n-1}\varphi'_{n-1}.$$

Si l'on ajoute ces quantités, on retrouve le premier membre ; l'équation (1) est donc identiquement satisfaite.

569. Occupons-nous de la seconde condition. L'identité des termes indépendants des variables x étant reconnue, l'équation aux dérivées partielles se réduit à

$$\frac{1}{4}\left[\varphi'_1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right)^2+\varphi'_2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\varphi'_{n-1}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-1}}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\chi'_{1,2}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}+\chi'_{1,3}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}+\ldots+\chi'_{n-2,n-1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-2}}\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-1}}\right]$$
$$=-\Delta\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}+\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}.$$

Nous devons prouver que les coefficients des termes en x_1^2 sont identiques dans les deux membres.

En ne conservant que ces coefficients, en remplaçant $\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}$ par sa valeur (1) et en supprimant les termes communs, l'identité à prouver se réduit à

$$(2)\quad a'_1=\left[\varphi'_2\frac{a_1a_2-b_{2,1}^2}{\Delta}+\varphi'_3\frac{a_1a_3-b_{3,1}^2}{\Delta}+\ldots+\varphi'_{n-1}\frac{a_1a_{n-1}-b_{n-1,1}^2}{\Delta}\right]$$
$$+2\left[\chi'_{2,3}\frac{a_1b_{2,3}-b_{2,1}b_{3,1}}{\Delta}\right.$$
$$\left.+\chi'_{2,4}\frac{a_1b_{2,4}-b_{2,1}b_{4,1}}{\Delta}+\ldots+\chi'_{n-2,n-1}\frac{a_1b_{n-2,n-1}-b_{n-1,1}b_{n-2,1}}{\Delta}\right].$$

570. Si l'on intègre f par rapport à x_1 entre $-\infty$ et $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\sum a_i x_i^2+2\sum b_{h,l}x_h x_l}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{\Delta}}\,dx_2\,dx_3\ldots dx_{n-1}\,dx_1,$$

on obtient l'expression F analogue à f, mais relative à $n-2$ variables, $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$.

Cette intégration s'effectue par la formule connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(m_1x^2+m_2x+m_3)}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m_1}}e^{\frac{m_2^2-4m_1m_3}{4m_1}}.$$

On obtient ainsi

$$F = \frac{e^{-\frac{\sum \frac{a_k a_1 - b_{k,1}^2}{\Delta} x_k^2 + 2\sum \frac{b_{h,l} a_1 - b_{h,1} b_{l,1}}{\Delta} x_h x_l}{a_1}}}{(\sqrt{\pi})^{n-2}\sqrt{a_1}} dx_2\, dx_3 \ldots dx_{n-1}$$

(k, h, l prennent les valeurs 2, 3, 4, ... $(n-1)$).

Cette formule est analogue à celle qui exprime f, mais elle est relative à $(n-2)$ variables.

L'équation (2) est relativement à F ce que l'équation (1) est relativement à f, c'est-à-dire qu'elle est identique.

Ainsi la quantité x_1^2 a le même coefficient dans les deux membres de l'équation aux dérivées partielles. Cette équation est donc satisfaite.

571. **Cas où il y a uniformité.** — Lorsque le jeu est uniforme, si l'on désigne par $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots$ les fonctions d'instabilité pour une partie et par $\chi'_{1,2}, \ldots$ les fonctions χ relatives à une partie, on a

$$\varphi_1 = \mu\varphi'_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = \mu\varphi'_{n-1}, \quad \chi_{1,2} = \mu\chi'_{1,2}, \quad \ldots;$$

$\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n-1}, \chi'_{1,2}, \ldots$ sont ici de simples coefficients.

La quantité μ peut alors être mise en facteur dans les déterminants et la probabilité pour que, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu la somme x_1, le joueur A_2 la somme x_2, ..., le joueur A_{n-1} la somme x_{n-1} est donnée par l'expression

$$\frac{e^{-\frac{\sum a_k x_k^2 + 2\sum b_{h,l} x_h x_l}{\mu\Delta}}}{(\sqrt{\pi\mu})^{n-1}\sqrt{\Delta}} dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

La lettre Δ désigne le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & -\chi'_{1,2} & \chi'_{1,3} & -\chi'_{1,4} & \cdots & \pm\chi'_{1,n-1} \\ -\chi'_{2,1} & \varphi'_2 & -\chi'_{2,3} & \chi'_{2,4} & \cdots & \mp\chi'_{2,n-1} \\ \chi'_{3,1} & -\chi'_{3,2} & \varphi'_3 & -\chi'_{3,4} & \cdots & \pm\chi'_{3,n-1} \\ -\chi'_{4,1} & \chi'_{4,2} & -\chi'_{4,3} & \varphi'_4 & \cdots & \mp\chi'_{4,n-1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \pm\chi'_{n-1,1} & \mp\chi'_{n-1,2} & \pm\chi'_{n-1,3} & \mp\chi'_{n-1,4} & \cdots & \varphi'_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Dans les quantités χ' on peut permuter les indices; nous avons écrit, par exemple, pour conserver la symétrie, $\chi_{2,1}$ au lieu de $\chi_{1,2}$.

La somme $\Sigma a_k x_k^2$ désigne la quantité

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^2.$$

La quantité a_k s'obtient, en supprimant dans le déterminant Δ, la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

La somme $\Sigma b_{h,l} x_h x_l$ désigne la quantité

$$\begin{aligned} & b_{1,2} \quad x_1 x_2 \quad + b_{1,3} x_1 x_3 + \ldots \\ & + b_{1,n-1} x_1 x_{n-1} + b_{2,3} x_2 x_3 + \ldots + b_{n-2,n-1} x_{n-2} x_{n-1}. \end{aligned}$$

La quantité $b_{h,l}$ s'obtient en supprimant dans le déterminant Δ la $h^{\text{ième}}$ ligne et la $l^{\text{ième}}$ colonne.

572. **Application à la théorie des épreuves répétées.** — *A chaque épreuve n événements A_1, A_2, ..., A_n peuvent se produire et s'excluent mutuellement; la probabilité de l'événement A_1 est $p_{1,1}$ à la première épreuve, $p_{1,2}$ à la seconde, ..., $p_{1,\mu}$ à la $\mu^{\text{ième}}$; la probabilité de l'événement A_2 est $p_{2,1}$ à la première épreuve, $p_{2,2}$ à la seconde, ..., $p_{2,\mu}$ à la $\mu^{\text{ième}}$, ...; la probabilité de l'événement A_{n-1} est $p_{n-1,1}$ à la première épreuve, $p_{n-1,2}$ à la seconde, ... $p_{n-1,\mu}$ à la $\mu^{\text{ième}}$.*

Quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement A_1 se produise $p_{1,1} + p_{1,2} + \ldots + p_{1,\mu} + x_1$ fois;
l'événement A_2, $p_{2,1} + p_{2,2} + \ldots + p_{2,\mu} + x_2$ fois; ...;
l'événement A_{n-1}, $p_{n-1,1} + p_{n-1,2} + \ldots + p_{n-1,\mu} + x_{n-1}$ fois?

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont les *écarts*. On suppose que, à chaque épreuve, il se produit nécessairement un des événements et un seul.

Si x_n désigne l'écart relatif à l'événement A_n, on a évidemment

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0.$$

Supposons que n joueurs, B_1, B_2, ..., B_n, perdent, à chaque partie, des sommes respectivement égales aux accroissements des écarts à l'épreuve correspondante, la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, ..., x_{n-1} en μ épreuves est la probabilité pour que ces joueurs perdent les sommes x_1, x_2, x_{n-1} en μ parties.

La question revient à calculer les fonctions φ et χ relatives aux jeux de B_1, B_2, ..., B_{n-1}.

A la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve il y a probabilité $p_{1,\mu}$ pour que l'écart relatif à l'événement A_1 augmente de $(1-p_{1,\mu})$ et probabilité $(1-p_{1,\mu})$ pour que cet écart diminue de $p_{1,\mu}$; l'espérance du joueur B_1 est donc nulle et son jeu est équitable. La fonction d'instabilité pour la $\mu^{\text{ième}}$ partie est

$$2[p_{1,\mu}^2(1-p_{1,\mu})+(1-p_{1,\mu})^2 p_{1,\mu}] = 2p_{1,\mu}(1-p_{1,\mu}).$$

Les fonctions d'instabilité jouissant de la propriété d'addition, la fonction d'instabilité relative au joueur B_1 pour les μ parties est

$$\varphi_1 = 2\sum_{i=1}^{i=\mu} p_{1,i}(1-p_{1,i}).$$

On obtiendrait des expressions analogues pour les autres joueurs.

Il s'agit maintenant de calculer les fonctions telles que $\chi_{1,2}$. Supposons que $\mu-1$ parties soient jouées et que les écarts correspondant aux événements A_1 et A_2 soient x_1 et x_2.

A l'épreuve suivante il y a probabilité $p_{1,\mu}$ pour que l'événement A_1 se produise; alors l'écart x_1 augmente de la quantité $(1-p_{1,\mu})$, l'écart x_2 diminue de $p_{2,\mu}$ et le produit des écarts augmenté de la quantité

$$x_2(1-p_{1,\mu}) - x_1 p_{2,\mu} - p_{2,\mu} + p_{1,\mu}p_{2,\mu}.$$

Il y a de même probabilité $p_{2,\mu}$ pour que l'événement A_2 se produise; alors l'écart x_1 diminue de la quantité $p_{1,\mu}$, l'écart x_2 augmente de $(1-p_{2,\mu})$ et le produit des écarts augmente de la quantité

$$x_1(1-p_{2,\mu}) - x_2 p_{1,\mu} - p_{1,\mu} + p_{1,\mu}p_{2,\mu}.$$

Il y a enfin probabilité $1-p_{1,\mu}-p_{2,\mu}$ pour que les événements A_1 et A_2 ne se produisent pas; alors les écarts diminuent de $p_{1,\mu}$, $p_{2,\mu}$ respectivement, et leur produit augmente de la quantité

$$-x_1 p_{2,\mu} - x_2 p_{1,\mu} + p_{1,\mu}p_{2,\mu}.$$

A la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve, le produit des écarts pour A_1 et A_2 augmente donc en moyenne de la quantité $-p_{1,\mu}p_{2,\mu}$.

Les valeurs moyennes des produits jouissant de la propriété d'addi-

tion, la valeur moyenne du produit des écarts x_1, x_2 pour les μ épreuves est

$$-\sum_{i=1}^{i=\mu} p_{1,i}\, p_{2,i}.$$

La fonction $\chi_{1,2}$ relative au jeu de B_1 et B_2 a donc pour valeur

$$\chi_{1,2} = -2\sum_{i=1}^{i=\mu} p_{1,i}\, p_{2,i}.$$

Connaissant les fonctions φ et χ, il suffit pour résoudre le problème d'appliquer la formule du n° 564; la probabilité pour que les joueurs B_1, B_2, ..., B_{n-1} perdent respectivement les sommes x_1, x_2, ..., x_{n-1}, c'est-à-dire *la probabilité pour que les écarts aient pour valeurs* x_1, x_2, ..., x_{n-1}, *est exprimée par la formule*

$$\frac{e^{-\frac{\Sigma c_k x_k^2 + 2\Sigma g_{h,l} x_h x_l}{2M}}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{M}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

M désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\sum p_{1,i}(1-p_{1,i}) & \sum p_{1,i}p_{2,i} & -\sum p_{1,i}p_{3,i} & \sum p_{1,i}p_{4,i} & -\sum p_{1,i}p_{5,i} & \ldots \pm\sum p_{1,i}p_{n-1,i} \\
\sum p_{2,i}p_{1,i} & \sum p_{2,i}(1-p_{2,i}) & \sum p_{2,i}p_{3,i} & -\sum p_{2,i}p_{4,i} & \sum p_{2,i}p_{5,i} & \ldots \mp\sum p_{2,i}p_{n-1,i} \\
-\sum p_{3,i}p_{1,i} & \sum p_{3,i}p_{2,i} & \sum p_{3,i}(1-p_{3,i}) & \sum p_{3,i}p_{4,i} & -\sum p_{3,i}p_{5,i} & \ldots \pm\sum p_{3,i}p_{n-1,i} \\
\sum p_{4,i}p_{1,i} & -\sum p_{4,i}p_{2,i} & \sum p_{4,i}p_{3,i} & \sum p_{4,i}(1-p_{4,i}) & \sum p_{4,i}p_{5,i} & \ldots \mp\sum p_{4,i}p_{n-1,i} \\
-\sum p_{5,i}p_{1,i} & \sum p_{5,i}p_{2,i} & -\sum p_{5,i}p_{3,i} & \sum p_{5,i}p_{4,i} & \sum p_{5,i}(1-p_{5,i}) & \ldots \pm\sum p_{5,i}p_{n-1,i} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\pm\sum p_{n-1,i}p_{1,i} & \mp\sum p_{n-1,i}p_{2,i} & \pm\sum p_{n-1,i}p_{3,i} & \mp\sum p_{n-1,i}p_{4,i} & \pm\sum p_{n-1,i}p_{5,i} & \ldots \sum p_{n-1,i}(1-p_{n-1,i})
\end{vmatrix}$$

Les sommations s'étendent à toutes les valeurs 1, 2, ..., μ de i.

La somme $\Sigma c_k x_k^2$ désigne la quantité

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \ldots + c_{n-1} x_{n-1}^2.$$

La quantité c_k s'obtient en supprimant dans le déterminant M la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

La somme $\Sigma g_{h,l}\, x_h\, x_l$ désigne la quantité

$$g_{1,2}x_1x_2 + g_{1,3}x_1x_3 + \ldots + g_{1,n-1}x_1x_{n-1} + g_{2,3}x_2x_3 + \ldots + g_{n-2,n-1}x_{n-2}x_{n-1}.$$

La quantité $g_{h,l}$ s'obtient en supprimant dans le déterminant M la $h^{\text{ième}}$ ligne et la $l^{\text{ième}}$ colonne.

573. Lorsque les μ épreuves sont identiques, la formule précédente se simplifie ; le déterminant M a pour valeur

$$\mathrm{M} = \mu^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_{n-1}(1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{n-1}),$$

ou, en désignant par p_n la probabilité de l'événement A_n,

$$\mathrm{M} = \mu^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n.$$

Le déterminant c_k se réduit à

$$c_k = \mu^{n-2} p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n \frac{p_k + p_n}{p_k p_n}.$$

Tous les déterminants g sont égaux ; leur valeur est

$$g = \mu^{n-2} \frac{p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n}{p_n}.$$

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ en μ épreuves est donc

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \ldots + 2x_{n-2}x_{n-1}}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

574. On peut mettre cette expression sous une forme symétrique en introduisant l'écart x_n qui correspond à l'événement A_n. De l'égalité

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = -\, x_n$$

on déduit

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \ldots + 2x_{n-2}x_{n-1} = x_n^2,$$

et l'expression de la probabilité devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n}}.$$

Sous cette forme on peut l'obtenir par une autre méthode (n° 645).

575. **Application à la théorie des probabilités mêlées.** — A chaque épreuve, trois événements A_1, A_2, A_3 peuvent se produire. La probabilité pour que l'événement A_1 se produise seul est p_1, la probabilité pour que l'événement A_2 se produise seul est p_2, la probabilité pour que l'événement A_3 se produise seul est p_3. La probabilité pour que les événements A_1 et A_2 se produisent simultanément est q_3, la probabilité pour que les événements A_1 et A_3 se produisent simultanément est q_2, la probabilité pour que les événements A_2 et A_3 se produisent simultanément est q_1. La probabilité pour que les trois événements A_1, A_2, A_3 se produisent simultanément est r, et il y a probabilité $t = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - q_1 - q_2 - q_3 - r$ pour qu'aucun des événements ne se produise.

La probabilité pour que l'événement A_1 se produise à une épreuve est donc $p_1 + q_3 + q_2 + r = \varpi_1$; la probabilité pour que l'événement A_2 se produise est $p_2 + q_1 + q_3 + r = \varpi_2$; la probabilité pour que l'événement A_3 se produise est $p_3 + q_2 + q_1 + r = \varpi_3$.

Si, sur un grand nombre μ d'épreuves, l'événement A_1 s'est produit $\mu\varpi_1 + x_1$ fois; l'événement A_2, $\mu\varpi_2 + x_2$ fois; l'événement A_3, $\mu\varpi_3 + x_3$ fois, on dit que les *écarts* sont x_1, x_2, x_3.

Quelle est la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, x_3 en μ épreuves?

Supposons que quatre joueurs B_1, B_2, B_3, B_4 jouent aux conditions suivantes : Les joueurs B_1, B_2, B_3 perdent, à chaque partie, des sommes respectivement égales aux accroissements des écarts à l'épreuve correspondante; le jeu du quatrième joueur B_4 est défini par l'égalité

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0;$$

le joueur B_4 perd la somme x_4.

Le jeu de B_4 est déterminé; supposons, par exemple, que, à une épreuve, les événements A_2 et A_3 se produisent simultanément (éventualité qui a pour probabilité q_1); le joueur B_2 perd alors l'augmentation de l'écart x_2, c'est-à-dire la somme $(1 - \varpi_2)$; le joueur B_3 perd de même la somme $(1 - \varpi_3)$; le joueur B_1 gagne la somme ϖ_1; la perte du joueur B_4 pour cette épreuve est la quantité x_4 définie par l'égalité

$$(1 - \varpi_2) + (1 - \varpi_3) - \varpi_1 + x_4 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x_4 = \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 - 2.$$

Le joueur B_4 a donc à chaque épreuve (ou à chaque partie) probabilité q_1 de perdre la somme $(\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 - 2)$. Le jeu de B_4 se définirait de même pour chacune des autres éventualités auxquelles correspondent les probabilités p_1, p_2, p_3, q_2, q_3, r, t.

Le jeu de B_4 est nécessairement équitable en même temps que celui des joueurs B_1, B_2, B_3.

La question proposée revient à chercher la probabilité pour que, en μ parties, les joueurs B_1, B_2, B_3 perdent les sommes x_1, x_2, x_3.

La formule du n° 571 résout le problème; il reste à chercher l'expression des quantités φ' et χ'.

Déterminons, par exemple, la valeur de φ'_1. A une épreuve quelconque il y a probabilité ϖ_1 pour que l'événement A_1 se produise et par suite pour que x_1 augmente de la quantité $(1 - \varpi_1)$; il y a probabilité $(1 - \varpi_1)$ pour que l'événement A_1 ne se produise pas et par suite pour que x_1 diminue de ϖ_1.

Le jeu de B_1 est donc équitable; la fonction d'instabilité φ'_1 est, par définition,

$$\varphi'_1 = 2[\varpi_1(1 - \varpi_1)^2 + (1 - \varpi_1)\varpi_1^2] = 2\varpi_1(1 - \varpi_1).$$

Cherchons maintenant la valeur de $\chi'_{1.2}$. Supposons que les écarts soient x_1 et x_2 et qu'une nouvelle épreuve ait lieu.

A cette nouvelle épreuve il y a probabilité p_1 pour que A_1 se produise seul; alors x_1 augmente de $(1 - \varpi_1)$, x_2 diminue de ϖ_2 et le produit des écarts augmente de la quantité

$$\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2.$$

Il y a de même probabilité p_2 pour que A_2 se produise seul; alors

x_1 diminue de ϖ_1, x_2 augmente de $(1-\varpi_2)$ et le produit des écarts augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1.$$

Il y a probabilité (p_3+t) pour que les événements A_1 et A_2 ne se produisent ni l'un ni l'autre; alors x_1 diminue de ϖ_1, x_2 diminue de ϖ_2, et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1.$$

Il y a probabilité q_1 pour que A_2 et A_3 se produisent simultanément; alors x_1 diminue de ϖ_1, x_2 augmente de $(1-\varpi_2)$, et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1.$$

Il y a probabilité q_2 pour que A_1 et A_3 se produisent simultanément; alors x_1 augmente de $(1-\varpi_1)$, x_2 diminue de ϖ_2, et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2.$$

Il y a probabilité (q_3+r) pour que A_1 et A_2 se produisent simultanément; alors x_1 augmente de $(1-\varpi_1)$, x_2 augmente de $(1-\varpi_2)$, et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 - \varpi_2 + x_1 + x_2 + 1.$$

Le produit $x_1 x_2$ augmente donc en moyenne à chaque épreuve de la quantité

$$\begin{aligned}
&p_1(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2) + p_2(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1)\\
&\quad + (p_3+t)(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1) + q_1(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1)\\
&\quad + q_2(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2)\\
&\quad + (q_3+r)(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 - \varpi_2 + x_1 + x_2 + 1)\\
&\qquad = -\varpi_1\varpi_2 + q_3 + r.
\end{aligned}$$

On a donc, par définition,

$$\chi'_{1,2} = -2\varpi_1\varpi_2 + 2(q_3+r).$$

Pour résoudre le problème proposé, il suffit d'appliquer la formule du n° 571. La probabilité pour que, en μ parties, les joueurs B_1, B_2, B_3 perdent respectivement les sommes x_1, x_2, x_3, c'est-à-dire *la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, x_3 en μ épreuves, est exprimée par la formule*

$$\frac{e^{-\frac{c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + 2 g_{1,2} x_1 x_2 + 2 g_{1,3} x_1 x_3 + 2 g_{2,3} x_2 x_3}{2 \mu M}}}{(\sqrt{2\pi\mu})^2 \sqrt{M}} dx_1 \, dx_2 \, dx_3,$$

M désignant le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} \varpi_1(1-\varpi_1) & \varpi_1\varpi_2 - q_3 - r & -\varpi_1\varpi_3 + q_2 + r \\ \varpi_2\varpi_1 - q_3 - r & \varpi_2(1-\varpi_2) & \varpi_2\varpi_3 - q_1 - r \\ -\varpi_3\varpi_1 + q_2 + r & \varpi_3\varpi_2 - q_1 - r & \varpi_3(1-\varpi_3) \end{vmatrix}.$$

c_1 est le déterminant obtenu en supprimant dans M la première ligne et la première colonne; c_2 s'obtient en supprimant la seconde ligne et la seconde colonne; c_3 en supprimant la troisième ligne et la troisième colonne.

$g_{1,2}$ s'obtient en supprimant dans M la première ligne et la seconde colonne; $g_{1,3}$ s'obtient en supprimant la première ligne et la troisième colonne, et $g_{2,3}$ en supprimant la seconde ligne et la troisième colonne.

576. Pour obtenir des formules simples nous avons résolu le problème des probabilités mêlées en supposant l'uniformité et en considérant seulement le cas de trois variables; la méthode employée est absolument générale et s'applique à tous les cas.

Si n événements A_1, A_2, ..., A_n sont possibles, ces événements ne s'excluant pas et les probabilités différant à chaque épreuve, on forme comme précédemment la probabilité totale $\varpi_{1,1}$ pour que l'événement A_1 se produise à la première épreuve; la probabilité totale $\varpi_{1,2}$ pour qu'il se produise à la deuxième, ..., la probabilité totale $\varpi_{1,\mu}$ pour qu'il se produise à la $\mu^{\text{ième}}$.

On forme de même les probabilités totales $\varpi_{2,1}$, $\varpi_{2,2}$, ..., $\varpi_{2,\mu}$ pour que l'événement A_2 se produise à la première, la deuxième, ..., la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve et les probabilités analogues pour les événements A_3, ..., A_n.

Si, en μ épreuves, l'événement A_1 se produit

$$\varpi_{1,1}+\varpi_{1,2}+\ldots+\varpi_{1,\mu}+x_1 \text{ fois;}$$

l'événement A_2, $\varpi_{2,1}+\varpi_{2,2}+\ldots+\varpi_{2,\mu}+x_2$ fois; ...; l'événement A_n, $\varpi_{n,1}+\varpi_{n,2}+\ldots+\varpi_{n,\mu}+x_n$ fois, on dit que les *écarts* sont x_1, x_2, ..., x_n.

Assimilant les écarts à des pertes à un jeu, le problème qui consiste à chercher la probabilité d'écarts donnés n'est plus qu'un cas particulier du problème général que nous avons résolu.

Après avoir généralisé la théorie des probabilités mêlées, il nous resterait à essayer de généraliser les résultats que nous avons obtenus dans le cas des probabilités connexes à deux variables. J'abandonne au lecteur la recherche de ces généralisations.

CHAPITRE XIX.

PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES.

577. On dit qu'un problème est relatif aux probabilités géométriques lorsqu'il consiste à déterminer la probabilité pour qu'un ensemble de points, de lignes ou de surfaces dépendant d'une certaine façon du hasard possède une propriété géométrique donnée.

Nous ne ferons pas une étude systématique de la théorie des probabilités géométriques : nous traiterons seulement les problèmes relatifs à la forme des triangles tracés au hasard.

Nous avons défini la probabilité par le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, tous ces cas étant considérés comme ayant égale vraisemblance.

Il résulte de cette définition que la première donnée de tout problème de probabilité doit être relative au mode de division en cas d'égale vraisemblance.

Dans la plupart des problèmes, ce mode de division est sous-entendu dans l'énoncé; mais, lorsqu'il s'agit de probabilités géométriques, il est nécessaire, au contraire, de le préciser. Plusieurs modes de division peuvent, en effet, paraître acceptables d'après l'énoncé du problème, quoique, généralement, ils ne paraissent pas également naturels.

Relativement à ce sujet, un exemple dû à Bertrand est devenu classique : On trace au hasard une corde dans un cercle; quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit?

L'expression de corde tracée au hasard ne précise pas suffisamment la division en cas d'égale vraisemblance; en adoptant trois modes de

division différents, Bertrand fut conduit à trois valeurs différentes pour la probabilité cherchée : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

Si l'on étudie une question particulière, la nature de la question peut imposer un mode de division ; mais, s'il s'agit d'une question générale, il est nécessaire de comparer les différentes hypothèses qui conduisent aux différents modes de division et de dégager de cette comparaison l'hypothèse qui semble la plus naturelle, s'il en est une.

Cette comparaison, qui peut être très délicate dans certains cas, sort quelque peu du domaine des mathématiques pures.

Pour le problème qui fera l'objet de cette étude, il existe une hypothèse qui semble toute naturelle. Nous traiterons d'abord d'autres cas, afin de procéder, en quelque sorte, par élimination.

Il s'agit d'abord de définir ce que l'on doit entendre par l'expression de *triangle tracé au hasard*.

578. Considérons une aire plane limitée par une courbe fermée Γ ; décomposons cette aire en un très grand nombre de carrés infinitésimaux par un double système de droites parallèles équidistantes ; à chaque carré nous pouvons faire correspondre un numéro d'ordre ; si nous tirons au hasard un de ces numéros comme à une loterie, le carré infinitésimal, c'est-à-dire le point correspondant, est un point pris au hasard à l'intérieur de l'aire.

Si l'on tire trois numéros et si l'on joint les points correspondants par des droites, on obtient un triangle.

Ce triangle dépend à un certain point de vue du hasard, mais ne peut évidemment être considéré comme un triangle tracé au hasard.

En écartant l'hypothèse considérée, nous ne devons pas en conclure qu'elle ne puisse présenter d'intérêt ou même d'utilité dans certains cas ; l'un des problèmes les plus étudiés de la théorie des probabilités géométriques consiste, précisément, à déterminer la superficie moyenne du triangle formé par trois points pris au hasard à l'intérieur d'une aire.

579. On peut encore obtenir un triangle en brisant au hasard une tige AB en trois morceaux ou, si l'on veut, en divisant la ligne AB en trois segments par deux points pris au hasard.

Par ce terme il faut entendre que, la ligne AB étant divisée en un très grand nombre d'éléments égaux, on fait correspondre à chaque élément un numéro d'ordre. On tire au hasard deux numéros comme à une loterie; les éléments correspondants, c'est-à-dire les points correspondants, sont des points pris au hasard sur la ligne AB.

Les trois segments ainsi déterminés ne peuvent former un triangle que si le plus grand est inférieur à la somme des deux autres. La probabilité pour que les segments puissent former un triangle est $\frac{1}{4}$.

Dans ces conditions, le triangle moyen est celui dont les côtés sont proportionnels aux nombres 16, 13, 7.

Lorsque les trois segments forment un triangle, la probabilité pour que ce triangle soit obtusangle est $9 - 12 \log 2$, soit environ 0,682.

Ces résultats présentent quelque intérêt; mais, si un triangle formé par la rupture d'une tige est dû, à un certain point de vue, au hasard, il est évident qu'on ne peut le considérer comme un triangle tracé au hasard.

580. Au lieu d'obtenir un triangle en partageant une ligne AB en trois segments par deux points pris au hasard, on peut diviser trois lignes égales AB, $A'B'$, $A''B''$ en deux segments en prenant sur chacune d'elles un point M, M′, M″ au hasard.

Les segments AM, $A'M'$, $A''M''$ ne déterminent un triangle que si le plus grand est inférieur à la somme des deux autres; la probabilité de cette éventualité est $\frac{1}{2}$.

Dans ces conditions, le triangle moyen est celui dont les côtés sont proportionnels aux nombres 6, 5, 3.

La probabilité pour que le triangle soit obtusangle est $\frac{\pi - 2}{2}$, soit environ 0,571.

Ces résultats présentent quelque intérêt: mais il est bien évident que le triangle obtenu comme il vient d'être dit n'est pas ce qu'on peut considérer comme un triangle tracé au hasard.

581. Que doit-on donc entendre par l'expression de triangle tracé au hasard?

Un triangle tracé au hasard est un triangle formé par trois droites me-

nées au hasard, c'est-à-dire par trois droites dont les directions sont absolument quelconques.

Soient NOM l'une des droites, OK l'une des autres (le lecteur est prié de faire la figure); dire que ces droites sont tracées au hasard revient à dire que, si l'on désigne par θ l'angle KOM qu'elles forment entre elles, toutes les valeurs de θ (comprises entre zéro et π) ont égale vraisemblance.

La probabilité d'une valeur particulière de θ, c'est-à-dire la probabilité pour que l'angle soit compris entre θ et $\theta + d\theta$, est $\frac{d\theta}{\pi}$.

Considérons maintenant une troisième droite tracée au hasard; elle rencontre OM en E et OK en H; toutes les valeurs de l'angle $\psi =$ OEH ou de l'angle $\varphi =$ OHE ont égale vraisemblance.

Par le point O menons une parallèle OL à EH (de même sens que EH); l'angle LOH est égal à φ et l'angle LON est égal à ψ.

Les angles formés par les trois droites menées au hasard, c'est-à-dire les angles du triangle, ont ainsi même sommet O; leur somme est égale à π. Les trois angles d'un triangle sont donc trois quantités θ, φ, ψ telles que chacune d'elles considérée individuellement puisse prendre toutes les valeurs également vraisemblables entre o et π et telle que la somme $\theta + \varphi + \psi = \pi$.

On conçoit que cette dernière condition change les probabilités relatives aux angles; il est évident, par exemple, que la valeur moyenne d'un angle est $\frac{\pi}{2}$ quand aucune condition ne lui est imposée et qu'elle n'est plus que $\frac{\pi}{3}$ quand on sait que l'angle appartient à un triangle.

582. *Quelle est la probabilité pour qu'un angle d'un triangle ait pour valeur* θ?

Supposons que ce soit l'angle KOM, par exemple, et qu'il soit déterminé par la seconde ligne tirée au hasard (la première étant NOM).

La probabilité pour que l'angle KOM soit égal à θ est $\frac{d\theta}{\pi}$.

La droite OL (parallèle à EH), menée au hasard, doit se trouver comprise dans l'angle NOK égal à $\pi - \theta$; la probabilité de cette éventualité est $\frac{\pi - \theta}{\pi}$.

La probabilité pour que l'angle considéré ait pour valeur θ et pour qu'il soit formé par la seconde droite, menée au hasard, est donc, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi},$$

et, comme l'angle θ peut être formé par la seconde ou la troisième droite tirée au hasard, *la probabilité pour qu'un angle d'un triangle ait une valeur donnée* θ *est*

$$2\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}.$$

Toutes les valeurs de l'angle de zéro à π ne sont plus également vraisemblables quand cet angle appartient à un triangle. La valeur la plus probable est zéro, la valeur la moins probable est π, la valeur moyenne

$$\int_0^\pi \theta\, 2\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}=\frac{\pi}{3},$$

résultat évident.

La valeur probable x de l'angle, c'est-à-dire celle qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassée, est donnée par l'équation

$$\int_0^x 2\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}=\frac{1}{2};$$

d'où $x=\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=52^\circ 43'$ environ.

583. *Quelle est la probabilité pour que le plus grand angle d'un triangle ait pour valeur* θ *?*

Si l'angle considéré θ est supérieur à $\frac{\pi}{2}$, il est nécessairement le plus grand, et la probabilité pour qu'il soit le plus grand et pour qu'il ait pour valeur θ est simplement la probabilité pour qu'il ait pour valeur θ multipliée par trois, car le plus grand angle peut être l'un des trois angles du triangle.

La probabilité est alors

$$6\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}.$$

En intégrant entre $\frac{\pi}{2}$ et π on obtient *la probabilité pour qu'un triangle soit obtusangle :*

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 6\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi} = \frac{3}{4}.$$

Ce théorème peut être démontré sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours au calcul intégral.

Au point O, élevons une perpendiculaire OR sur NOM. Pour qu'un angle désigné, l'angle θ par exemple, soit obtus, il faut que les lignes OK et OL, tracées au hasard, soient toutes deux comprises dans l'angle droit NOR : la probabilité de cette condition est $\frac{1}{2}$ pour chacune des deux lignes, et, par conséquent, elle est $\frac{1}{4}$ pour les deux.

La probabilité pour qu'un angle désigné soit obtus est $\frac{1}{4}$, et la probabilité pour que l'un quelconque des angles soit obtus est $\frac{3}{4}$.

Étudions le cas où l'angle considéré est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$.

L'angle déterminé par la seconde ligne OK menée au hasard fait un angle θ avec OM ; la probabilité de cette éventualité est $\frac{d\theta}{\pi}$.

L'angle φ doit être, par hypothèse, inférieur à θ ; donc la troisième droite OL, menée au hasard, doit faire avec OM un angle LOM inférieur à 2θ.

L'angle ψ doit être, par hypothèse, inférieur à θ ; donc, l'angle LOM doit être supérieur à $\pi-\theta$.

L'angle LOM doit donc être inférieur à 2θ et supérieur à $\pi-\theta$; il doit donc être compris entre $\pi-\theta$ et 2θ.

La droite OL doit donc former avec OM un angle compris entre $\pi-\theta$ et 2θ ; la probabilité de cette éventualité est

$$\frac{2\theta-(\pi-\theta)}{\pi} = \frac{3\theta-\pi}{\pi}.$$

La probabilité pour que l'un des angles (désigné) soit déterminé par la seconde droite tracée au hasard, pour qu'il soit le plus grand et pour

qu'il ait pour valeur θ est donc

$$\frac{3\theta-\pi}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}.$$

La probabilité pour que l'un quelconque des trois angles soit déterminé par la seconde ou par la troisième droite tracée au hasard pour qu'il soit le plus grand et pour qu'il ait pour valeur θ est donc

$$6\frac{3\theta-\pi}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}.$$

En résumé, *la probabilité pour que le plus grand angle d'un triangle ait pour valeur* θ *est*

$$6\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}, \qquad \text{si } \theta>\frac{\pi}{2},$$

$$6\frac{3\theta-\pi}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}, \qquad \text{si } \frac{\pi}{2}>\theta>\frac{\pi}{3}.$$

584. La valeur la plus probable du plus grand angle est $\frac{\pi}{2}$.

La valeur moyenne du plus grand angle est

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\theta 6\frac{3\theta-\pi}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\theta 6\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}=\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{2}=110^{\circ}.$$

La valeur probable x du plus grand angle est celle qui a même probabilité d'être ou de ne pas être dépassée ; elle est donc définie par l'égalité

$$\int_{x}^{\pi}6\frac{\pi-\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}=\frac{1}{2},$$

dont on déduit $x=\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=106^{\circ}$.

585. On peut effectuer des calculs analogues relativement au plus petit angle ; on voit facilement que la probabilité pour que le plus petit angle ait pour valeur θ est

$$6\frac{\pi-3\theta}{\pi}\frac{d\theta}{\pi}.$$

La valeur moyenne du plus petit angle d'un triangle est

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \theta 6 \frac{\pi - 3\theta}{\pi} \frac{d\theta}{\pi} = \frac{\pi}{9} = 20^\circ.$$

La valeur la plus probable du plus petit angle est nulle.

La valeur probable du plus petit angle est $\frac{\pi}{6}(2 - \sqrt{2}) = 17^\circ$ environ.

On verrait de même que l'angle moyen d'un triangle tracé au hasard a pour valeur moyenne $\frac{5\pi}{18} = 50^\circ$, pour valeur probable $\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 52^\circ$ environ et pour valeur la plus probable $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

586. Une des conclusions les plus importantes que nous puissions déduire des résultats précédents est la suivante :

Le triangle moyen a pour angles 110°, 50° *et* 20°.

Je ne ferai que citer les théorèmes suivants :

La valeur moyenne du carré d'un angle d'un triangle est $\frac{\pi^2}{6}$.

La valeur moyenne du produit de deux angles est $\frac{\pi^2}{12}$.

La valeur moyenne du produit des trois angles est $\frac{\pi^3}{60}$.

La valeur moyenne du carré du plus grand angle est $\frac{85\pi^2}{216}$.

La valeur moyenne du carré de l'angle moyen est $\frac{19\pi^2}{216}$.

La valeur moyenne du carré du plus petit angle est $\frac{4\pi^2}{216}$.

587. Si l'on assujettit les angles d'un triangle à vérifier certaines conditions, les résultats qui précèdent sont nécessairement altérés ; ils présentent d'ailleurs un intérêt beaucoup moindre.

Si, par exemple, le triangle doit être acutangle, la valeur moyenne du carré d'un angle est $\frac{\pi^2}{4}$, la valeur moyenne du produit de deux angles est $\frac{5\pi^2}{48}$ et la valeur moyenne du produit des trois angles est $\frac{7\pi^3}{960}$.

La valeur moyenne du plus grand angle est $\frac{16\pi}{36} = 80°$.

La valeur moyenne de l'angle moyen est $\frac{13\pi}{36} = 65°$.

La valeur moyenne du plus petit angle est $\frac{7\pi}{36} = 35°$.

Lorsqu'un triangle est obtusangle, les valeurs moyennes de ses angles sont 120°, 45° et 15°.

CHAPITRE XX.

PROBABILITÉS CINÉMATIQUES.

588. Nous disons qu'un problème est relatif aux *probabilités cinématiques* lorsqu'il consiste à étudier les déplacements d'un point ou d'un système, ces déplacements dépendant en totalité ou en partie du hasard.

Dans ce Chapitre nous traiterons deux questions ; la première étudie le mouvement d'un point qui se déplace au hasard ; la seconde est relative à un cas où le hasard n'agit pas seul.

Pour ces problèmes comme pour les suivants nous emploierons une méthode uniforme qui consiste à ramener la question proposée à notre théorie générale qui est une théorie du jeu ; nous pourrons ainsi constater une fois de plus les grands avantages que présente à tous les points de vue la conception de l'*unité du calcul des probabilités*.

Les formules que nous obtiendrons dans ce Chapitre et dans le suivant sont asymptotiques ; il importe de le remarquer une fois pour toutes.

589. *Un point géométrique* M *est animé d'une vitesse* v *dont la grandeur est constante et dont la direction varie constamment au hasard. Le mouvement de* M *étant rapporté à trois axes rectangulaires passant par sa position initiale, quelle est la probabilité pour que, au bout du temps* t, *le point considéré ait pour coordonnées* x, y, z ?

Suivant notre méthode générale, nous imaginons quatre joueurs A, B, C, D, et nous faisons correspondre chaque élément de temps à une partie de leur jeu considéré comme continu. Nous supposons que, à chaque partie, les joueurs perdent des sommes respectivement égales

aux accroissement de x, y, z, $-x-y-z$ dans l'élément de temps correspondant.

Pendant un élément de temps, le point M subit un déplacement $c\,dt$ dans une direction quelconque, *toutes les directions ayant égale vraisemblance* (c'est, par définition, ce qu'il faut entendre par le terme direction variant au hasard). Ce déplacement du point M ne dépend en rien des déplacements antérieurs ni de la position actuelle du point.

Soient $\xi\,dt$, $\eta\,dt$, $\zeta\,dt$ les projections du déplacement du point M pendant l'élément de temps dt; les valeurs moyennes de ξ, η, ζ sont nulles par raison de symétrie. De l'égalité

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=c^2,$$

on déduit, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\text{VM}\,\xi^2+\text{VM}\,\eta^2+\text{VM}\,\zeta^2=c^2,$$

et, comme ces valeurs moyennes sont égales par raison de symétrie, on a

$$\text{VM}\,\xi^2=\text{VM}\,\eta^2=\text{VM}\,\zeta^2=\frac{c^2}{3}.$$

La valeur moyenne des produits $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ est nulle par raison de symétrie; à chaque valeur positive de $\xi\eta$ correspond une valeur négative de même probabilité.

Considérons maintenant le jeu de A; à une partie quelconque ce joueur perd une somme $\xi\,dt$ indépendante des faits antérieurs du jeu et de sa perte totale actuelle; son jeu admet donc l'indépendance; ce jeu est de plus équitable, puisque la valeur moyenne de ξ est nulle.

La valeur moyenne des carrés des pertes de A pour une partie est $\frac{c^2}{3}\,dt$.

La valeur moyenne du produit $\xi\eta\,dt$ des pertes des joueurs A et B pour une partie est nulle.

Le jeu considéré de A, B, C, D admettant l'indépendance, le problème proposé qui consiste à chercher la probabilité pour que les joueurs A, B, C perdent respectivement les sommes x, y, z en t parties est un cas particulier de celui qui a été résolu au n° 565; il suffit de calculer les fonctions φ et χ d'après les données du problème.

φ_1 est la fonction d'instabilité relative au jeu de A pour t parties; c'est le double de la somme des valeurs moyennes des carrés des pertes du joueur A pour chaque partie, c'est-à-dire la quantité

$$2\int_0^t \frac{v^2}{3}\,dt,$$

dans le cas général où la vitesse v est une fonction arbitraire donnée du temps et la quantité $\frac{2}{3}v^2 t$ lorsque la vitesse v est constante.

Les fonctions φ_2 et φ_3 ont même valeur que φ_1. Les fonctions χ sont nulles; par exemple, $\chi_{1,2}$ est le double de la somme des valeurs moyennes des produits des pertes de A et B pour chaque partie, et ces valeurs moyennes sont nulles comme nous l'avons vu.

Remplaçant dans la formule générale du n° 565 les quantités φ par $\frac{2}{3}v^2 t$ et les quantités χ par zéro, on obtient la probabilité pour que les joueurs A, B, C perdent les sommes x, y, z en t parties, c'est-à-dire *la probabilité pour que, à l'époque t, les coordonnées du point mobile soient x, y, z* :

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{2}{3}v^2 t}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{3}v^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

590. Lorsque la vitesse v, au lieu d'être constante, est une fonction arbitraire donnée du temps, la même probabilité a pour valeur

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{2}{3}\int_0^t v^2\,dt}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{3}\int_0^t v^2\,dt\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

591. *La probabilité pour que le point* M *se trouve à l'époque t à une distance r de son point de départ est*

$$\frac{4r^2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2 t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr.$$

La valeur moyenne de r est

$$\int_0^\infty r\,\frac{4r^2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{3}v^2t}.$$

La valeur moyenne quadratique de r est

$$\left[\int_0^\infty r^2\,\frac{4r^2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}v^2t}.$$

La valeur la plus probable de r s'obtient en annulant la dérivée par rapport à r de la probabilité; on trouve ainsi $\sqrt{\frac{2}{3}v^2t}$.

Si l'on considère une surface sphérique infiniment mince de rayon fixe r, la probabilité sur cette surface sphérique commence par croître avec t jusqu'à ce que $t = \frac{r^2}{v^2}$. Elle décroît ensuite, et, lorsque $t = \frac{3r^2}{2v^2}$, elle devient maxima relativement aux autres. Le maximum individuel précède le maximum relatif.

La probabilité pour que le point M soit en dehors de la sphère de rayon R est

$$\int_R^\infty \frac{4r^2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr.$$

Les valeurs de R qui correspondent à la même probabilité (écarts isoprobables) sont proportionnelles à $\sqrt{\frac{2}{3}v^2t}$.

Cette dernière intégrale est de la forme $\int \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda$; elle se calcule facilement à l'aide des Tables de la fonction Θ; on a, en effet, en intégrant par parties,

$$\int e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \lambda e^{-\lambda^2} + \int 2\lambda^2 e^{-\lambda^2}\,d\lambda;$$

d'où

$$\int \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda = -\frac{\lambda e^{-\lambda^2}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

La valeur probable de r est la valeur de R pour laquelle l'intégrale ci-dessus a pour valeur $\frac{1}{2}\cdot$ En d'autres termes, cette valeur probable est la distance qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassée à l'époque t; cette valeur probable est égale à $1,09\ldots\sqrt{\frac{2}{3}c^2 t}$.

En résumé, dans le cas considéré, le point s'éloigne proportionnellement à la racine carrée du temps.

592. Si la vitesse était variable, les écarts croîtraient comme la quantité

$$\left(\int_0^t c^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si la vitesse c décroît indéfiniment lorsque t croît, les écarts peuvent ne pas croître indéfiniment et tendre, lorsque t augmente, vers une valeur asymptote.

Si, par exemple, $c = \frac{1}{t+\alpha}$, on a

$$\int_0^t c^2\,dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{t+\alpha};$$

la probabilité pour que le point M soit à une distance r à l'époque t est

$$\frac{4r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{t+\alpha}\right)}}}{\sqrt{\pi}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{t+\alpha}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\,dr,$$

et, le temps croissant indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la *loi finale* exprimée par la formule

$$\frac{4r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}\alpha}}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr.$$

593. Si le point M devait se mouvoir dans un plan contenant la vitesse v, la probabilité pour que, à l'époque t, le point M soit à une distance r de son point de départ serait

$$\frac{2re^{-\frac{r^2}{v^2t}}}{v^2t}dr.$$

Si le point M devait se mouvoir sur une ligne, la vitesse v pouvant, à chaque instant, avec égale vraisemblance, être dirigée dans un sens ou dans l'autre, la probabilité pour que le point M soit, à l'époque t, à une distance x de son point de départ serait

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2v^2t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2v^2t}}dx.$$

594. **Cas où le hasard n'agit pas seul.** — Dans la question que nous allons étudier le hasard n'agit pas seul; le point géométrique considéré est animé d'un mouvement qui dépend de sa position actuelle. Le problème présentant quelque difficulté, nous étudierons d'abord le cas du mouvement dans un plan.

Un point M *qui est mobile dans un plan est attiré par un point fixe* O *de ce plan proportionnellement à la distance. Indépendamment du mouvement dû à cette attraction, le point* M *est constamment animé d'une vitesse* v *dont la grandeur est constante et dont la direction varie au hasard. Quelle est la probabilité pour que, au bout du temps* t, *le point* M *occupe une position donnée dans le plan.*

Le point M est considéré comme dépourvu d'inertie.

Il importe de bien préciser les conditions admises par l'énoncé. Soit, à l'époque t, $\mathrm{OM} = r$ la distance du point M au point O ; dans l'intervalle de temps t, $t + dt$, le point M subit deux déplacements : l'un de grandeur $v\,dt$ et de direction quelconque (toutes les directions étant également vraisemblables), et l'autre de grandeur $ar\,dt$ (a étant une constante) dirigé suivant le rayon vecteur MO.

Le mouvement du point M ne dépend, à chaque instant, que de sa distance actuelle au point O et que de l'effet actuel du hasard.

Rapportons le mouvement à deux axes rectangulaires passant par O ; soient x_1, y_1 les coordonnées initiales du point M, x, y les coordonnées du même point à l'époque t. Le problème considéré consiste à chercher la probabilité pour que les coordonnées du point M soient x et y à l'époque t lorsqu'elles ont eu au début pour valeurs x_1 et y_1.

Imaginons trois joueurs A, B, C, perdant, à chaque partie, des sommes respectivement égales aux accroissements de x, y, $-x-y$ pendant l'élément de temps correspondant ; le problème proposé peut s'énoncer ainsi : Les joueurs A, B, C ayant initialement perdu les sommes x_1, y_1, quelle est la probabilité pour que, au bout de t parties, ils aient perdu les sommes x, y?

(Leurs pertes pour ces t parties seraient donc $x - x_1$ et $y - y_1$, si cette éventualité se réalisait.)

Supposons que, à l'époque t, les coordonnées du point M soient x et y et par suite que les pertes des joueurs A, B, C soient x, y, $-(x+y)$; nous allons déterminer les espérances ψ_1, ψ_2, ψ_3, et les fonctions d'instabilité φ_1, φ_2, φ_3 relatives aux jeux de A, B, C dans l'élément de temps suivant (ou, si l'on veut, pendant la partie suivante).

Étudions le déplacement du point M parallèlement à l'axe des x dans cet élément de temps ; le déplacement dû au hasard s'effectuant indifféremment dans tous les sens ne fait pas varier, en moyenne, la coordonnée x. Du fait de ce déplacement, l'espérance mathématique des trois joueurs est nulle. Le déplacement dû à l'attraction diminue la coordonnée x de la quantité ax, le joueur A gagne de ce fait la somme ax ; son espérance mathématique pour l'élément de temps dt est donc ax.

Les espérances mathématiques des joueurs B et C sont de même ay et $-a(x+y)$.

Les espérances sont donc proportionnelles aux pertes actuelles.

Occupons-nous des fonctions d'instabilité. Soit θ l'angle du déplacement $v\,dt$ dû au hasard avec l'axe des x; la probabilité pour que le hasard produise l'angle θ est $\frac{d\theta}{2\pi}$, et, si cette éventualité se réalise, la coordonnée x augmente de la quantité $v \cos\theta$ dans le temps dt.

Le déplacement dû à l'attraction diminuant pendant le même temps la coordonnée x de la quantité ax, l'accroissement total de cette coor-

donnée est $v \cos\theta - ax$ et la valeur moyenne du carré de l'accroissement est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(v\cos\theta - ax)^2\,d\theta = \frac{v^2}{2} + a^2x^2.$$

La fonction d'instabilité relative au joueur A et au même intervalle dt est le double de la valeur moyenne du carré de l'accroissement de x diminué du double du carré de la valeur moyenne de cet accroissement ; cette fonction d'instabilité est donc

$$\varphi_1 = 2\left(\frac{v^2}{2} + a^2x^2\right) - 2(-ax)^2 = v^2.$$

La fonction d'instabilité relative au jeu de B a de même pour valeur v^2.

Pour obtenir la fonction d'instabilité relative au joueur C, on doit remarquer qu'il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que ce joueur perde la somme $-v\cos\theta + ax - v\sin\theta + ay$ et que, dans ces conditions, la fonction d'instabilité a pour valeur

$$2\int_0^{2\pi}[(-v\cos\theta + ax - v\sin\theta + ay)^2 - 2a^2(x^2+y^2)]\frac{d\theta}{2\pi} = 2v^2.$$

Les fonctions d'instabilité sont donc constantes.

Les fonctions d'instabilité étant constantes et les espérances étant proportionnelles aux pertes actuelles, le problème peut être résolu par la théorie des probabilités connexes et il suffit de lui appliquer la formule du n° 553.

La probabilité pour que les pertes des joueurs A et B soient x et y au bout de t parties quand elles ont eu initialement pour valeurs x_1, y_1 est

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-\frac{(x-x_1e^{-at})^2+(y-y_1e^{-at})^2}{\frac{\varphi_1}{2a}(1-e^{-2at})}}}{\frac{\varphi_1}{2a}(1-e^{-2at})}\,dx\,dy.$$

La probabilité pour que le point M *qui a pour coordonnées initiales*

x_1, y_1, *ait pour coordonnées* x, y *à l'époque* t *est exprimée par la formule*

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-\frac{(x-x_1e^{-at})^2+(y-y_1e^{-at})^2}{\frac{v^2}{2a}(1-e^{-2at})}}}{\frac{v^2}{2a}(1-e^{-2at})}\,dx\,dy.$$

595. L'influence des coordonnées initiales va sans cesse en diminuant lorsque t augmente.

Lorsque t croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la loi finale exprimée par la formule

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{\frac{v^2}{2a}}}}{\frac{v^2}{2a}}\,dx\,dy.$$

La probabilité pour que, finalement, le point M se trouve à une distance du centre attractif O comprise entre r et $r+dr$ est donnée par la formule

$$\frac{2r\,e^{-\frac{r^2}{\frac{v^2}{2a}}}}{\frac{v^2}{2a}}\,dr.$$

La valeur moyenne finale de r est $\frac{\sqrt{\pi}\,v}{2\sqrt{2a}}\cdot$

La valeur moyenne quadratique finale de r est $\frac{v}{\sqrt{2a}}\cdot$

La valeur de r qui a finalement la plus grande probabilité est $\frac{v}{\sqrt{2}\sqrt{2a}}\cdot$

La valeur probable finale de r est $0{,}832\ldots\frac{v}{\sqrt{2a}}\cdot$

596. Supposons que le point M parte initialement du point O; la probabilité pour que, à l'époque t, il se trouve à une distance de ce point comprise entre r et $r+dr$ est

$$\frac{2r\,e^{-\frac{r^2}{\frac{v^2}{2a}(1-e^{-2at})}}}{\frac{v^2}{2a}(1-e^{-2at})}\,dr.$$

La valeur moyenne de r est $\frac{\sqrt{\pi}}{2} v \sqrt{\frac{1-e^{-2at}}{2a}}$.

La valeur moyenne quadratique de r est $v\sqrt{\frac{1-e^{-2at}}{2a}}$.

La valeur la plus probable de r est $\frac{1}{\sqrt{2}} v \sqrt{\frac{1-e^{-2at}}{2a}}$.

La valeur probable de r est $0{,}832\ldots v\sqrt{\frac{1-e^{-2at}}{2a}}$.

La probabilité pour que le point M soit en dehors du cercle de rayon R est

$$\int_R^\infty \frac{2re^{-\frac{r^2}{\frac{v^2}{2a}(1-e^{-2at})}}}{\frac{v^2}{2a}(1-e^{-2at})} dr = e^{-\frac{R^2}{\frac{v^2}{2a}(1-e^{-2at})}}.$$

Cette probabilité tend vers la valeur finale $e^{-\frac{R^2}{\frac{v^2}{2a}}}$.

Les valeurs de R qui correspondent à la même probabilité (écarts isoprobables) sont proportionnelles à $v\sqrt{\frac{1-e^{-2at}}{2a}}$

597. Si le hasard agissait seul, a serait nul et la probabilité pour que le point M soit à la distance r du point O serait

$$\frac{2re^{-\frac{r^2}{v^2t}}}{v^2t} dr.$$

Les écarts croîtraient indéfiniment et proportionnellement à la racine carrée du temps.

L'effet du hasard est de tendre à éloigner le point M du point O.

598. *Cercle d'attraction.* — Le hasard tend à éloigner le point M du point O alors que l'attraction l'en rapproche ; nous allons déterminer le rayon vecteur ρ pour lequel ces deux actions s'équivalent.

Soit r la distance du point M au point O ; calculons l'accroissement moyen de r dans le temps dt en supposant que le hasard agisse seul.

La probabilité pour que le déplacement $v\,dt$ dû au hasard fasse un angle θ avec la droite OM est $\frac{d\theta}{2\pi}$ Si cette éventualité se réalise, le

point M vient en un point M′ pour lequel on a

$$\text{OM}' = \sqrt{r^2 + v^2 + 2rv\cos\theta}.$$

La valeur moyenne de $\dot{\text{O}}$M′, c'est-à-dire la valeur moyenne du rayon vecteur après le déplacement, est

$$\int^{2\pi} \sqrt{r^2 + v^2 + 2rv\cos\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Le déplacement v étant très petit auprès de r, cette intégrale a pour valeur $r + \frac{v^2}{4r}$.

Telle est la valeur moyenne du rayon vecteur r après le déplacement ; comme elle avait primitivement pour valeur r, l'accroissement moyen de r dû au hasard pendant le temps dt est $\frac{v^2}{4r}dt$.

D'autre part, l'attraction diminuant r de la quantité $ar\,dt$, les deux actions se neutralisent quand

$$r = \frac{v}{\sqrt{2}\sqrt{2a}}.$$

Lorsque le point M est à l'intérieur du cercle de rayon $\rho = \frac{v}{\sqrt{2}\sqrt{2a}}$, l'effet du hasard l'emporte en moyenne sur l'attraction et le point M a une tendance à s'écarter du centre O.

Au contraire, lorsque le point M est à l'extérieur du cercle de rayon ρ, l'effet de l'attraction prédomine en moyenne et le point a une tendance à se rapprocher du centre O.

Tout se passe comme si la circonférence de rayon ρ attirait le point M ; d'où la dénomination de cercle d'attraction.

On peut remarquer que la valeur $\frac{v}{\sqrt{2}\sqrt{2a}}$ a été obtenue pour le rayon auquel correspond la plus grande probabilité finale.

C'est donc au cercle d'attraction que correspond finalement la plus grande probabilité.

599. *Un point* M *qui est mobile dans l'espace est attiré par un centre fixe* O *proportionnellement à la distance. Indépendamment du mouve-*

ment dû à cette attraction, le point M est constamment animé d'une vitesse v dont la grandeur est constante et dont la direction varie au hasard. Quelle est la probabilité pour que, au bout du temps t, le point M occupe une position donnée dans l'espace?

Le point M est considéré comme dépourvu d'inertie.

Il importe de bien préciser les conditions admises par l'énoncé : Soit, à l'époque t, $\mathrm{OM} = r$ la distance du point M au point O ; dans l'intervalle de temps t, $t + dt$ le point M subit deux déplacements : l'un de grandeur $v\,dt$ et de direction quelconque (toutes les directions étant également vraisemblables) et l'autre de grandeur $ar\,dt$ (a étant une constante) dirigé suivant le rayon vecteur MO.

Le mouvement du point M ne dépend, à chaque instant, que de sa distance actuelle au point O et que de l'effet actuel du hasard.

Le problème doit être traité comme dans le cas du mouvement plan : mais, sa complication étant plus grande, nous n'exposerons pas l'analyse qui conduit à sa solution, et nous nous contenterons d'en faire connaître le résultat.

Rapportons le mouvement à trois axes rectangulaires passant par O. La probabilité pour que le point M, qui a pour coordonnées initiales x_1, y_1, z_1, ait pour coordonnées x, y, z à l'époque t est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{(x-x_1e^{-at})^2+(y-y_1e^{-at})^2+(z-z_1e^{-at})^2}{\frac{v^2}{3a}(1-e^{-2at})}}}{\pi\sqrt{\pi}\left[\frac{v^2}{3a}(1-e^{-2at})\right]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

599. L'influence des coordonnées initiales va sans cesse en diminuant lorsque t augmente.

Lorsque t croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la loi finale exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{v^2}{3a}}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{v^2}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

La probabilité pour que, finalement, le point M se trouve à une distance du centre attractif O comprise entre r et $r + dr$ est donnée par la formule

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{r^2 e^{\frac{r^2}{\frac{c^2}{3a}}}}{\left(\frac{c^2}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}} dr.$$

La valeur moyenne finale de r est $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{c}{\sqrt{3a}}$.

La valeur moyenne quadratique finale de r est $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{c}{\sqrt{3a}}$.

La valeur de r qui a finalement la plus grande probabilité est $\frac{c}{\sqrt{3a}}$.

La valeur probable finale de r est $1,09\ldots \frac{c}{\sqrt{3a}}$.

600. Supposons que le point M parte initialement du point O; la probabilité pour que, à l'époque t, il se trouve à une distance r de ce point est

$$\frac{4r^2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{c^2}{3a}(1-e^{-2at})}}}{\left[\frac{c^2}{3a}(1-e^{-2at})\right]^{\frac{3}{2}}} dr.$$

La valeur moyenne de r est $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{c\sqrt{1-e^{-2at}}}{\sqrt{3a}}$.

La valeur moyenne quadratique de r est

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{c\sqrt{1-e^{-2at}}}{\sqrt{3a}}.$$

La valeur la plus probable de r est $\frac{c\sqrt{1-e^{-2at}}}{\sqrt{3a}}$.

La valeur probable de r est de $1,09\ldots \frac{c\sqrt{1-e^{-2at}}}{\sqrt{3a}}$.

La probabilité pour que le point M soit en dehors de la sphère de

rayon R est

$$\int_{R}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{v^2}{3a}(1-e^{-2at})}}}{\left[\frac{v^2}{3a}(1-e^{-2at})\right]^{\frac{3}{2}}} dr.$$

Les valeurs de R qui correspondent à la même probabilité (écarts isoprobables) sont proportionnelles à $v\sqrt{\frac{1-e^{-2at}}{3a}}$.

Cette dernière intégrale est de la forme $\int \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda$; elle se calcule facilement, comme nous l'avons vu (n° 591), à l'aide des tables de la fonction Θ.

601. Si le hasard agissait seul, a serait nul et la probabilité pour que le point M soit à la distance r du centre O serait

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2 t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} dr.$$

Les écarts croîtraient indéfiniment et proportionnellement à la racine carrée du temps.

L'effet du hasard est de tendre à éloigner le point M du centre O.

602. *Sphère d'attraction.* — Le hasard tend à éloigner le point M du centre O, alors que l'attraction l'en rapproche ; il est intéressant de déterminer la distance $OM = \rho$ pour laquelle ces deux actions s'équivalent.

En raisonnant comme dans le cas du mouvement plan on obtient pour valeur de ρ la quantité $\frac{v}{\sqrt{3a}}$.

Lorsque le point M est à l'intérieur de la sphère de rayon ρ, l'effet du hasard l'emporte, en moyenne, sur l'attraction et le point a une tendance à s'écarter du centre O.

Au contraire, lorsque le point M est à l'extérieur de la sphère de

rayon ρ, l'effet de l'attraction prédomine, en moyenne, et le point M a une tendance à se rapprocher du centre O.

Tout se passe comme si la surface sphérique de rayon ρ attirait le point M ; d'où la dénomination de sphère d'attraction.

On peut remarquer que la valeur $\rho = \frac{c}{\sqrt{3a}}$ avait été précédemment obtenue pour le rayon de probabilité maxima.

C'est à la sphère d'attraction que correspond finalement la plus grande probabilité.

CHAPITRE XXI.

PROBABILITÉS DYNAMIQUES.

603. Nous disons qu'un problème est relatif aux *probabilités dynamiques* lorsqu'il consiste à étudier le mouvement d'un point ou d'un système matériels, les forces qui sollicitent ce point ou ce système dépendant en totalité ou en partie du hasard.

Nous allons donc étudier le mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force dont la grandeur est constante et dont la la direction varie constamment au hasard.

Notre analyse permettrait de supposer que la force varie en grandeur suivant une fonction donnée du temps, mais le problème ainsi généralisé serait sans doute moins intéressant parce que la plupart des résultats dépendraient de la forme particulière de la fonction donnée.

604. Les principaux problèmes que nous résoudrons sont les suivants :

Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une position donnée.

Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit animé d'une vitesse donnée.

Calculer la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une position donnée et pour qu'il soit de plus animé d'une vitesse donnée.

Calculer la probabilité pour que le point matériel ait une vitesse donnée quand il se meut dans un milieu résistant proportionnellement à la vitesse.

Ces problèmes présentant quelque difficulté, nous étudierons successivement les cas du mouvement dans un espace à une, deux et trois dimensions.

605. **Espace à une dimension. Problème relatif aux vitesses.** — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait une vitesse donnée v ?*

Supposons qu'un joueur A perde chaque instant une somme égale à l'accroissement de la vitesse à cet instant ; la probabilité pour que la vitesse soit v à l'époque t est la probabilité pour que le joueur A perde la somme v en t parties.

La force étant constante en grandeur produit, pendant chaque élément de temps, une accélération ou accroissement de vitesse α proportionnelle à cette force elle-même et inversement proportionnelle à la masse du point matériel.

Il y a, par définition, à chaque instant, égale probabilité pour que la force agisse dans un sens ou dans l'autre et par suite égale probabilité pour que α soit positif ou négatif.

Dans chaque élément de temps ou, si l'on veut, à chaque partie, la vitesse peut, avec égale probabilité, augmenter ou diminuer de la quantité α et cette augmentation ou cette diminution est indépendante des faits antérieurs ; le joueur A a donc, à chaque partie, égale probabilité de perdre ou de gagner la somme α. Le problème est donc le suivant :

A chaque partie (supposée indépendante des autres), un joueur A a égale probabilité de gagner ou de perdre la somme α ; quelle est la probabilité pour qu'il perde la somme v en t parties ?

Ce problème, qui suppose à la fois l'indépendance et l'uniformité, a été précédemment résolu.

La probabilité pour que la vitesse soit v à l'époque t est

$$\frac{e^{-\frac{v^2}{2\alpha^2 t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\alpha^2 t}}\,dv.$$

606. L'amplitude des écarts est mesurée par la quantité $\sqrt{2\alpha^2 t}$; donc :

Les vitesses croissent proportionnellement à la racine carrée du temps.

C'est la loi de croissance ordinaire, conséquence nécessaire de l'uniformité.

Le problème est trop simple pour que nous nous arrêtions aux conséquences que l'on peut déduire de la formule précédente. Dans le cas des probabilités des deuxième et troisième genres, la question présenterait déjà beaucoup plus d'intérêt ; mais comme elle ne constituerait encore qu'un cas très particulier des théories générales exposées précédemment, je ne crois pas utile d'insister sur ce sujet ; je citerai seulement, à titre d'exemple, le résultat suivant :

La probabilité pour que la vitesse maxima qui est atteinte dans l'intervalle de temps t soit $\pm v$ est exprimée par la série

$$\frac{4\,dv}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\alpha^2 t}}\left(e^{-\frac{v^2}{2\alpha^2 t}} - 3e^{-\frac{(3v)^2}{2\alpha^2 t}} + 5e^{-\frac{(5v)^2}{2\alpha^2 t}} - 7e^{-\frac{(7v)^2}{2\alpha^2 t}} + \ldots\right).$$

La valeur la plus probable de la vitesse maxima est $0{,}642\ldots\sqrt{2\alpha^2 t}$.

La valeur probable de la vitesse maxima est $0{,}8062\ldots\sqrt{2\alpha^2 t}$ et la valeur moyenne de cette vitesse maxima est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{2\alpha^2 t}$ ou $0{,}886\ldots\sqrt{2\alpha^2 t}$.

607. **Problème relatif aux positions.** — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit à une distance x de son point de départ ?*

L'idée qui se présente le plus naturellement à l'esprit consiste à employer notre méthode générale et à supposer qu'un joueur K perde à chaque instant une somme égale à l'accroissement de la distance x pendant cet instant. La probabilité demandée est alors la probabilité pour que le joueur K perde la somme x en t parties.

Ce procédé ne conduit pas à la résolution de la question posée parce que le jeu de K n'admet pas l'indépendance.

D'après le principe de l'inertie, le mouvement du point M dans un élément de temps dépend de la vitesse acquise antérieurement et par conséquent le jeu de K pour une partie dépend des faits antérieurs du jeu.

Pour tourner la difficulté, nous considérerons un jeu fictif pour lequel, finalement, à l'époque t, la probabilité d'une perte x sera égale à la probabilité d'un écart de situation x du point matériel M, alors que, pendant l'intervalle de temps compris entre zéro et t, les écarts relatifs à ce jeu ne correspondront pas avec les écarts de situation du point M au même instant.

La coïncidence se produira seulement à l'époque t.

Nous décomposerons l'action de la force considérée en ses actions successives pendant les intervalles de temps (zéro, dt), (dt, $2\,dt$), ($2\,dt$, $3\,dt$), ...

Au bout du premier intervalle dt, sous l'action de la force, le point M a parcouru une distance $\alpha\,dt$ (dans un sens ou dans l'autre, les deux sens ayant même probabilité) et, en vertu de l'inertie, ce mouvement se continue jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point matériel la distance αt.

L'action de la force pendant ce premier intervalle a pour effet de faire parcourir au point matériel dans un sens ou dans l'autre la distance αt.

Considérons le second intervalle de temps (compris entre dt et $2\,dt$); au bout de cet intervalle, la force aura communiqué au point matériel, dans un sens ou dans l'autre, un second déplacement $\alpha\,dt$ indépendant du premier et qui, en vertu du principe de l'inertie, se perpétuera jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point, dans un sens ou dans l'autre, la distance $\alpha(t-dt)$.

L'action de la force pendant ce deuxième intervalle aura pour effet de faire parcourir au point matériel dans un sens ou dans l'autre la distance $\alpha(t-dt)$.

L'action de la force pendant le troisième intervalle aura pour effet de faire parcourir au point matériel, dans un sens ou dans l'autre, la distance $\alpha(t-2\,dt)$.

L'action de la force pendant l'intervalle élémentaire correspondant au temps τ aura pour effet de faire parcourir au point matériel, dans un sens ou dans l'autre, la distance $\alpha(t-\tau)$.

L'effet de la force dans un intervalle élémentaire ne dépend pas du mouvement antérieur.

Le point matériel aura finalement pour abscisse à l'époque t la

somme des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires.

La probabilité pour que, finalement, le point matériel ait pour abscisse x, est la probabilité pour que la somme des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires ait pour valeur x.

Supposons maintenant qu'un joueur B perde ou gagne, à chaque partie, une somme égale à l'effet produit par la force dans l'élément de temps correspondant ; c'est-à-dire que ce joueur ait égale probabilité de gagner ou de perdre : la somme αt à la première partie, la somme $\alpha(t-dt)$ à la deuxième, la somme $\alpha(t-2dt)$ à la troisième, ..., la somme $\alpha(t-\tau)$ à la $\tau^{\text{ième}}$, ... La probabilité pour que le point matériel ait pour abscisse x à l'époque t est la probabilité pour que le joueur B perde la somme x en t parties.

Les parties successives étant indépendantes, cette probabilité s'obtient en appliquant la formule du n° 227. $\varphi'(\tau)$ est le double de la valeur moyenne des carrés des pertes du joueur B pour la partie élémentaire d'ordre τ. Or, à cette partie, le joueur a égale probabilité de gagner ou de perdre la somme $\alpha(t-\tau)$; on a donc

$$\varphi'(\tau) = 2\left\{\frac{1}{2}[\alpha(t-\tau)]^2 + \frac{1}{2}[\alpha(t-\tau)]^2\right\},$$

et l'on en déduit

$$\int_0^t \varphi'(\tau)\,d\tau = \frac{2}{3}\alpha^2 t^3.$$

La probabilité pour que le joueur B perde la somme x en t parties, c'est-à-dire *la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit à une distance x de son point de départ, est*

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{2}{3}\alpha^2 t^3}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\alpha^2 t^3}}\,dx.$$

608. Nous pouvons appliquer à la question considérée tous les résultats relatifs aux probabilités du premier genre lorsqu'il y a indé-

pendance, et, en particulier, la notion des écarts isoprobables nous conduit à la proposition suivante qui résume notre analyse :

Les écarts croissent proportionnellement à la puissance $\frac{3}{2}$ du temps.

609. Il faut remarquer que le jeu de B n'est nullement l'image du mouvement du point matériel dans l'intervalle compris entre zéro et t et qu'il ne peut faire connaître que les probabilités relatives à l'époque t. Il faut donc se garder d'appliquer à la question considérée les formules des probabilités des deuxième et troisième genres. Considérons, par exemple, le problème le plus simple des probabilités du second genre : Quelle est la probabilité pour que le point matériel dépasse au moins une fois l'abscisse $+x$ dans l'intervalle de temps t? Lorsqu'il y a indépendance nous employons un raisonnement d'une extrême simplicité faisant uniquement appel à des raisons de symétrie (n° 337) et qui, pour le cas considéré, se traduirait ainsi : Lorsque le point matériel franchit l'abscisse x (à l'époque t_1 pour fixer les idées), la probabilité d'un nouvel écart $+y$ (c'est-à-dire d'un écart total $x+y$) à l'époque t est égale à la probabilité d'un nouvel écart $-y$ (c'est-à-dire d'un écart total $x-y$) à la même époque.

Il est évident que ce raisonnement est inexact ; lorsque le point matériel dépasse l'abscisse $+x$, sa vitesse est dirigée vers l'extérieur et, par suite de cette vitesse acquise, la probabilité d'un nouvel écart y se produisant pendant le temps $t-t_1$ est plus grande que la probabilité de l'écart $-y$ se produisant dans le même temps. Le raisonnement employé lorsqu'il y a indépendance ne pourrait donc être appliqué dans le cas considéré.

610. Nous avons déjà remarqué (n° 315) que la forme de l'expression de la probabilité

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}dx$$

n'est nullement caractéristique des cas où il y a indépendance ; le problème considéré donne une nouvelle preuve de ce fait. Le jeu qui serait l'image réelle du mouvement du point matériel est un jeu

connexe d'un genre de connexité tout différent de ceux que nous avons étudiés antérieurement et, pour ce jeu encore, la probabilité est exprimée par une formule qui est un cas particulier de la précédente.

611. **Problèmes relatifs aux situations et aux vitesses.** — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit à une distance x de son point de départ et pour qu'il soit animé d'une vitesse v?*

Imaginons trois joueurs A, B, C et faisons correspondre chaque partie de leur jeu supposé continu à chacun des éléments de temps compris entre zéro et t.

A chaque instant le joueur A perd une somme égale à l'accroissement de la vitesse v à cet instant.

Le jeu de B est le jeu fictif définitif au n° 607. A la partie d'ordre τ ou, si l'on veut, à l'instant τ, le joueur B a égale probabilité de gagner ou de perdre la somme $\alpha(t-\tau)$.

Si l'on désigne par x' sa perte totale, x' est différent de l'écart de situation x du point M, sauf l'époque t.

Lorsqu'il s'agira de probabilités relatives à l'époque t, nous pourrons remplacer x' par x; mais, s'il s'agissait d'une autre époque, la substitution conduirait à un résultat erroné. Ce fait se conçoit immédiatement, la partie la plus importante du jeu de B est la première, alors qu'au contraire c'est le dernier élément de temps qui contribue le plus à faire varier l'écart de situation.

Le joueur C fermera le jeu, c'est-à-dire que, à chaque partie, il perdra la somme des gains de ses adversaires; sa perte totale sera $z = -v - x'$.

Le jeu est équitable et les parties successives sont indépendantes; la probabilité pour que les joueurs B et A perdent respectivement les sommes x' et v en t parties est donc exprimée par la formule du n° 566; cette probabilité est

$$\frac{e^{-\frac{\varphi_2 x'^2 + \varphi_1 v^2 - 2\chi x' v}{\varphi_1\varphi_2 - \chi^2}}}{\pi\sqrt{\varphi_1\varphi_2 - \chi^2}}\,dx'\,dv.$$

φ_1 est la fonction d'instabilité relative à x' (n° 607), c'est-à-dire $\frac{2}{3}\alpha^2 t^3$.

φ_2 est la fonction d'instabilité relative à v (n° 605), c'est-à-dire $2\alpha^2 t$.

χ s'obtient en formant le double de la valeur moyenne de l'augmentation du produit $x'v$ pour une partie et en sommant pour toutes les parties de zéro à t.

Supposons que, à la partie d'ordre τ, les pertes soient x' et v; le produit de ces pertes est alors $x'v$.

A la partie suivante il y a probabilité $\frac{1}{2}$ pour que le nouveau déplacement du point matériel soit positif, alors x' augmente de $\alpha(t-\tau)$; v augmente de α et le produit $x'v$ augmente de la quantité

$$[x'+\alpha(t+\tau)][v+\alpha]-x'v=\alpha x'+v\alpha(t-\tau)+\alpha^2(t-\tau).$$

Il y a également probabilité $\frac{1}{2}$ pour que le nouveau déplacement du point matériel soit négatif, alors x' diminue de $\alpha(t-\tau)$, v diminue de α et le produit $x'v$ diminue de la quantité

$$vx'-[x'-\alpha(t-\tau)][v-\alpha]=\alpha x'+v\alpha(t-\tau)-\alpha^2(t-\tau).$$

L'augmentation moyenne de $x'v$ à la partie d'ordre τ est donc $\alpha^2(t-\tau)$; pour l'ensemble des parties, elle est

$$\int_0^t \alpha^2(t-\tau)\,d\tau=\frac{\alpha^2 t^2}{2}.$$

χ est le double de cette quantité; on a donc

$$\chi=\alpha^2 t^2.$$

La probabilité pour que, en t parties, les joueurs B et A perdent respectivement les sommes x et v est alors

$$\frac{e^{\frac{2x'^2-2tvx'+\frac{2}{3}t^2v^2}{\frac{\alpha^2 t^3}{3}}}}{\pi\frac{\alpha^2 t^2}{\sqrt{3}}}\,dx'\,dv.$$

A l'époque t, $x'=x$ et, d'après la définition de ces quantités, les pro-

babilités qui leur sont relatives sont égales. Il en résulte que *la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel M soit à une distance x de son point de départ et pour qu'il soit animé d'une vitesse v est*

$$\frac{e^{-\frac{2x^2-2tvx+\frac{2}{3}t^2v^2}{\frac{1}{3}\alpha^2t^3}}}{\pi\frac{\alpha^2t^2}{\sqrt{3}}}\,dx\,dv.$$

Si l'on intègre cette expression par rapport à v entre $-\infty$ et $+\infty$, on retrouve la formule du n° 607, résultat évident.

Si l'on intègre par rapport à x entre $-\infty$ et $+\infty$, on retrouve la formule du n° 605, résultat évident.

612. La dernière formule peut s'écrire

$$\frac{e^{-\frac{v^2}{2\alpha^2t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\alpha^2t}}\,dv\times\frac{e^{-\frac{\left(x-\frac{tv}{2}\right)^2}{\frac{\alpha^2t^3}{6}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\alpha^2t^3}{6}}}\,dx.$$

D'après le principe de la probabilité composée, la probabilité pour que la vitesse soit v et pour que l'écart de situation soit x est égale au produit de la probabilité pour que la vitesse soit v par la probabilité pour que l'écart de situation soit x quand on sait que la vitesse est v. Or, dans la formule précédente, le premier terme est la probabilité pour que la vitesse soit v; donc : *Lorsque l'on sait que la vitesse est v, la probabilité d'un écart x est*

$$\frac{e^{-\frac{\left(x-\frac{tv}{2}\right)^2}{\frac{\alpha^2t^3}{6}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\alpha^2t^3}{6}}}\,dx.$$

L'écart x_1 qui a la plus grande probabilité et qui est en même temps la valeur moyenne et probable de x est

$$x_1=\frac{tv}{2};$$

x_1 est la valeur normale de l'écart quand on sait que la vitesse est v. Les autres écarts peuvent être définis par leur différence à x_1 : Posons $x - x_1 = y$; la probabilité de l'écart *relatif* y est

$$\frac{e^{-\frac{y^2}{\frac{\alpha^2 t^3}{6}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\alpha^2 t^3}{6}}} dy.$$

Les écarts relatifs sont proportionnels à $\frac{\alpha t \sqrt{t}}{\sqrt{6}}$ quand la vitesse v est donnée, quelle que soit cette vitesse.

Lorsque la vitesse est inconnue, les écarts (n° 607) sont proportionnels à $\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha t \sqrt{t}$.

La connaissance de la vitesse diminue de moitié les écarts de situation.

Ce résultat très curieux mérite d'être signalé : Le seul fait de savoir que la vitesse est connue sans que la valeur de cette vitesse soit spécifiée diminue de moitié les écarts relatifs de situation.

La connaissance de la valeur exacte de la vitesse ne change rien à ce résultat.

La connaissance de la valeur exacte de la vitesse n'influe que sur la valeur moyenne de la situation du point matériel, elle n'influe pas sur les écarts relatifs de part et d'autre de cette valeur moyenne.

613. La valeur moyenne de x lorsque v est connu est, comme nous l'avons vu, égale à $\frac{tv}{2}$; ce résultat peut être obtenu par un procédé élémentaire faisant connaître un résultat intéressant sur les combinaisons.

Puisque la vitesse est v à l'époque t, il y a eu, pendant ce temps t, $\frac{t+v}{2}$ accroissements de vitesse positifs et $\frac{t-v}{2}$ accroissements de vitesse négatifs.

Un accroissement ou une diminution de vitesse ayant lieu à l'époque τ produisant sur x' un accroissement ou une diminution égaux à $\alpha(t-\tau)$, la détermination de la valeur moyenne de x' et par suite celle de x se ramène à la résolution du problème suivant :

Une urne contient m boules blanches $\left(\text{ici } m = \frac{t+v}{2}\right)$ et n boules noires $\left(\text{ici } n = \frac{t-v}{2}\right)$, on extrait une à une les boules de cette urne sans remettre dans l'urne la boule sortie ; on effectue donc $m+n$ tirages.

Si au premier tirage la boule est blanche, un joueur H gagne la somme $m+n$ et si elle est noire il perd la somme $m+n$.

Au second tirage, si la boule est blanche, le joueur H gagne $m+n-1$ et si elle est noire il perd cette même somme.

Au $k^{\text{ième}}$ tirage (quel que soit k), si la boule est blanche, le joueur H gagne $m+n-k+1$ et si elle est noire il perd la même somme. Quelle est l'espérance mathématique du joueur H ?

Chaque cas possible représente une permutation de $m+n$ boules dont m sont blanches et n sont noires ; une de ces permutations peut se représenter par une suite comme celle-ci

N B B B N ..... N N B N B.

La première lettre N indique que le premier tirage a donné une noire, ce qui a valu au joueur H la perte $(m+n)$.

La deuxième, la troisième et la quatrième lettre expriment que, aux deuxième, troisième et quatrième tirages, il est sorti une boule blanche ; il en résulte que le joueur H a gagné successivement les sommes $m+n-1$, $m+n-2$, $m+n-3$, etc.

A l'avant-dernier tirage il est sorti une noire, ce qui a produit une perte de deux francs, et au dernier tirage il est sorti une blanche, ce qui a donné un gain de un franc.

Nous nommons *permutation symétrique* d'une permutation donnée la permutation écrite en sens inverse : par exemple, la permutation symétrique de la précédente est

B N B N N ..... N B B B N.

Chaque permutation a sa symétrique et inversement ; si l'on formait la liste de toutes les permutations directes et la liste de toutes les symétriques, chaque permutation de la première liste se trouverait dans la seconde et inversement ; les listes seraient identiques, à l'ordre près.

Nous allons démontrer que la somme des espérances correspondant à une permutation quelconque et à sa symétrique est constante.

Supposons, par exemple, qu'une lettre B occupe le rang i dans la permutation directe; elle occupera le rang $m+n-i$ dans la permutation symétrique. Elle procurera le gain $m+n-i+1$ dans la permutation directe et le gain i dans la permutation symétrique, elle procurera donc le gain $m+n+1$.

Chaque lettre B produira donc le gain $m+n+1$ et chaque lettre N produira la perte $m+n+1$. Comme il y a m lettres B et n lettres N, le gain total sera, pour une permutation directe et sa symétrique, $(m+n+1)(m-n)$. Pour une permutation directe il sera, en moyenne,

$$\frac{1}{2}(m+n+1)(m-n).$$

Telle est l'espérance mathématique du joueur H.

614. On pourrait obtenir le même résultat, mais plus péniblement, en formant l'équation aux différences partielles du problème.

Soit $u_{x,y}$ l'espérance mathématique du joueur H quand il y a dans l'urne x boules blanches et y boules noires $x+y=xy$, on a

$$u_{x,y} = \frac{x}{x+y}(x+y+u_{x-1,y}) + \frac{y}{x+y}(-x-y+u_{x,y-1}).$$

En effet, il y a probabilité $\frac{x}{x+y}$ pour qu'une boule blanche sorte; le joueur H gagne alors la somme $(x+y)$ et son espérance devient $u_{x-1,y}$; il y a de même probabilité $\frac{y}{x+y}$ pour qu'une boule noire sorte, le joueur H perd alors la somme $(x+y)$ et son espérance devient $u_{x,y-1}$. L'équation précédente est donc exacte; on vérifie sans difficulté qu'elle est satisfaite en posant

$$u_{x,y} = \frac{1}{2}(x+y+1)(x-y).$$

615. Si les boules étaient replacées après chaque tirage, les enjeux suivant toujours la même loi, l'espérance mathématique du joueur H serait la même.

Au tirage de rang i, le joueur H aurait probabilité $\frac{m}{m+n}$ de gagner

la somme $m+n-i+1$ et probabilité $\frac{n}{m+n}$ de perdre cette même somme; son espérance pour ce tirage serait

$$\frac{m-n}{m+n}(m+n-i+1),$$

et comme il y a $m+n$ tirages auxquels correspondent les valeurs $1, 2, 3, \ldots (m+n)$ de i, l'espérance totale de H serait

$$\frac{1}{2}(m+n+1)(m-n).$$

616. Si m et n sont très grands, l'expression de l'espérance mathématique peut s'écrire

$$\frac{1}{2}(m+n)(m-n),$$

et si l'on remplace m par $\frac{t+v}{2}$ et n par $\frac{t-v}{2}$, on obtient comme précédemment la valeur $\frac{vt}{2}$.

617. En raisonnant comme précédemment (n° 612) on verrait que si l'écart de situation x est connu, la valeur moyenne, probable et plus probable de la vitesse v est $\frac{3}{2t}x$ et que les écarts de la vitesse de part et d'autre de cette moyenne sont la moitié de ce qu'ils seraient si l'écart de situation x était inconnu.

Le seul fait de savoir que l'écart de situation est connu diminue de moitié les écarts de vitesse.

Le seul fait de savoir que la vitesse est connue diminue de moitié les écarts de situation.

Il y a donc réciprocité.

Si, plus généralement, on considère trois joueurs A, B, C (jeu équitable), le seul fait de savoir que le joueur A a perdu une certaine somme diminue dans un certain rapport les écarts relatifs au jeu de B; le seul fait de savoir que le joueur B a perdu une certaine somme

diminue dans le même rapport les écarts relatifs au jeu de A. Il y a réciprocité.

Mais cette réciprocité n'existe que pour les écarts considérés deux à deux : elle n'existe pas pour l'ensemble. Le seul fait de savoir que A a perdu une certaine somme diminue les écarts relatifs au jeu de B dans un certain rapport et les écarts relatifs au jeu de C dans un autre rapport.

618. **Cas d'une résistance de milieu.** — On suppose que la résistance est proportionnelle à la vitesse et que son expression est mkv, m étant la masse du point. Quelle est la probabilité pour que le point matériel ait une vitesse v à l'époque t ?

Supposons qu'un joueur H perde à chaque instant une somme égale à l'accroissement de la vitesse pendant cet instant et que, à l'époque t, la vitesse soit v.

Dans l'intervalle de temps élémentaire suivant, il y a probabilité $\frac{1}{2}$ pour que la vitesse augmente de la quantité $\alpha - kv$ et probabilité $\frac{1}{2}$ pour qu'elle diminue de la quantité $\alpha + kv$.

L'espérance du joueur H pour cet intervalle élémentaire (ou pour cette partie) est donc

$$\frac{1}{2}(\alpha + kv) - \frac{1}{2}(\alpha - kv) = kv.$$

L'espérance mathématique du joueur H est proportionnelle à sa perte actuelle.

La fonction d'instabilité pour la même partie est

$$2\left[\frac{1}{2}(\alpha + kv)^2 + \frac{1}{2}(\alpha - kv)^2 - k^2v^2\right] = 2\alpha^2.$$

Cette quantité est donc constante.

L'espérance mathématique du joueur H étant proportionnelle à sa perte actuelle et la fonction d'instabilité de son jeu étant constante, nous sommes conduits à un problème de probabilités connexes du premier genre (n° 305). La probabilité pour que, en t parties, le joueur H ait perdu la somme v, c'est-à-dire la probabilité pour que, à

l'époque t, le point matériel ait la vitesse v, est

$$\frac{e^{-\frac{v^2}{\alpha^2\frac{1-e^{-2kt}}{k}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha^2\frac{1-e^{-2kt}}{k}}}dv.$$

619. Lorsque le temps croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la loi finale exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{k}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\alpha^2}{k}}}dv.$$

La vitesse moyenne finale est

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}.$$

La vitesse probable finale est

$$0,47693\ldots\frac{\alpha}{\sqrt{k}}.$$

620. La théorie des probabilités connexes à laquelle nous avons été conduits permet de résoudre le problème quand la fonction d'instabilité et l'espérance dépendent explicitement du temps (nº 314). Nous pouvons donc calculer la probabilité d'une vitesse v à l'époque t quand la force considérée est égale à une fonction donnée du temps et quand la résistance du milieu est égale au produit de la vitesse par une fonction donnée du temps.

621. **Espace à deux dimensions.** — Nous étudions le mouvement d'un point matériel dans un plan, la force qui sollicite ce point dans le plan étant constante en grandeur et variant pour la direction au hasard, toutes les directions ayant égale vraisemblance.

Le mouvement du point considéré M peut être rapporté à deux axes coordonnés Ox, Oy; l'origine O des coordonnées étant la position occupée par le point à l'origine du temps.

Dire que la direction de la force varie constamment au hasard revient à dire que la probabilité pour qu'à un instant quelconque elle fasse un angle θ avec l'axe des x est $\frac{d\theta}{2\pi}$.

622. **Problème relatif aux vitesses.** — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point materiel soit animé d'une vitesse dont les composantes sont X et Y?*

On doit supposer que trois joueurs A, B, C perdent, à chaque instant, des sommes égales aux accroissements de X, Y, $(-X-Y)$ à cet instant; la probabilité cherchée est la probabilité pour que A perde la somme X et B, la somme Y, en t parties.

Le jeu étant équitable, cette probabilité est donnée par la formule du n° 566 et l'on a, dans le cas considéré, $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha^2 t$, $\chi = 0$.

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{\alpha^2 t}}}{\pi \alpha^2 t} dX\, dY.$$

La probabilité pour que la vitesse ait une valeur donnée v est

$$\frac{2v e^{-\frac{v^2}{\alpha^2 t}}}{\alpha^2 t} dv.$$

La vitesse croît, dans l'ensemble, proportionnellement à la racine carrée du temps.

La valeur moyenne de la vitesse à l'époque t est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha \sqrt{t}.$$

La valeur moyenne quadratique de la vitesse est

$$\alpha \sqrt{t}.$$

La valeur probable de la vitesse est

$$0{,}832\ldots \alpha \sqrt{t}.$$

La valeur la plus probable de la vitesse est

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\sqrt{t}.$$

La probabilité pour que, à l'époque t, la vitesse soit supérieure à v est

$$e^{-\frac{v^2}{\alpha^2 t}}.$$

623. **Problème relatif aux positions.** — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une situation donnée?*

Il s'agit de calculer la probabilité pour que le point M ait pour coordonnées x, y à l'époque t.

Comme dans le cas d'un espace à une dimension, nous décomposerons l'action de la force en ses actions successives pendant les intervalles de temps (zéro, dt), (dt, $2\,dt$), ($2\,dt$, $3\,dt$), ...

Au bout du premier intervalle dt et sous l'action de la force, le point M a parcouru une distance $\alpha\,dt$ et il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que ce déplacement fasse un angle θ avec l'axe des x.

En vertu de l'inertie, ce mouvement se continue jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point une distance αt dans une direction quelconque.

Considérons le second intervalle de temps (compris entre dt et $2\,dt$). Au bout de cet intervalle, la force aura communiqué au point matériel, dans une direction quelconque, un second déplacement $\alpha\,dt$ indépendant du premier et qui, en vertu du principe de l'inertie, se perpétuera jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point une distance $\alpha(t - dt)$.

Pendant l'intervalle élémentaire correspondant au temps τ, la force aura communiqué au point matériel, dans une direction quelconque, un déplacement $\alpha\,dt$ indépendant des précédents et qui, en vertu du principe de l'inertie, se perpétuera jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point une distance $\alpha(t - \tau)$.

Le point matériel aura finalement pour abscisse à l'époque t la somme des projections sur l'axe des x des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires.

La probabilité pour que, finalement, le point matériel ait pour abscisse x et pour ordonnée y est la probabilité pour que les sommes des projections des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires aient respectivement pour valeurs x et y.

Supposons maintenant que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : à la partie d'ordre τ, le joueur A perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des x, le joueur B perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des y; le joueur C gagne la somme des pertes de A et de B.

La probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour coordonnées x, y est la probabilité pour que la somme des projections considérées soient x et y ou pour que les joueurs A et B perdent respectivement les sommes x et y en t parties.

Le jeu étant équitable, la probabilité cherchée est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{\varphi_2 x^2 + \varphi_1 y^2 - 2\chi xy}{\varphi_1\varphi_2 - \chi^2}}}{\pi\sqrt{\varphi_1\varphi_2 - \chi^2}}\,dx\,dy.$$

Pour obtenir φ_1 (égal à φ_2 par raison de symétrie), on doit former le double de la valeur moyenne des carrés des pertes du joueur A pour la partie d'ordre τ et intégrer ensuite entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Soient ξ et ζ les projections de la longueur $\alpha(t-\tau)$ sur les axes, c'est-à-dire les pertes de A et de B à la partie d'ordre τ; on a

$$\xi^2 + \zeta^2 = \alpha^2(t-\tau)^2,$$

ou, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\text{VM}\,\xi^2 + \text{VM}\,\zeta^2 = \alpha^2(t-\tau)^2.$$

Ces valeurs moyennes étant égales par raison de symétrie, on a

$$\text{VM}\,\xi^2 = \text{VM}\,\zeta^2 = \frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{2}.$$

La valeur moyenne des carrés des pertes du joueur A à la partie d'ordre τ est donc $\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{2}$; on en déduit

$$\varphi_1 = \int_0^t 2\,\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{2}\,d\tau = \frac{\alpha^2 t^3}{3}\cdot$$

Pour obtenir χ, on doit former le double de la valeur moyenne du produit $\xi\zeta$ et intégrer entre $\tau = 0$ et $\tau = t$. Or la valeur moyenne de $\xi\zeta$ est nulle, car, à chaque valeur positive de ce produit, correspond une valeur négative de même probabilité; donc χ est nul.

Remplaçant, dans la formule précédente, φ_1 et φ_2 par $\frac{\alpha^2 t^3}{3}$ et χ par zéro, on obtient *la probabilité pour que le point matériel ait pour coordonnées x et y à l'époque t* :

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{\frac{\alpha^2 t^3}{3}}}}{\pi \frac{\alpha^2 t^3}{3}} dx\, dy.$$

On doit remarquer que le jeu considéré n'est nullement l'image du mouvement du point M pendant le temps t; il fait seulement connaître l'expression de la probabilité à l'époque t.

La probabilité pour que, au bout du temps t, le point M *soit à une distance r de l'origine est*

$$\frac{2re^{-\frac{r^2}{\frac{\alpha^2 t^3}{3}}}}{\frac{\alpha^2 t^3}{3}} dr.$$

La valeur moyenne de r est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\alpha t\sqrt{t}}{\sqrt{3}}.$$

La valeur moyenne quadratique de r est

$$\frac{\alpha t\sqrt{t}}{\sqrt{3}}.$$

La valeur la plus probable de r est

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha t\sqrt{t}}{\sqrt{3}}.$$

La valeur probable de r est

$$0{,}832\ldots \frac{\alpha t\sqrt{t}}{\sqrt{3}}.$$

La probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit à une distance supérieure à R est

$$e^{\frac{R^2}{\frac{\alpha^2 t^3}{3}}}.$$

En résumé, les écarts de situation croissent proportionnellement à la puissance $\frac{3}{2}$ du temps.

624. Problème relatif aux situations et aux vitesses. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une position donnée (x, y) et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes sont* X *et* Y?

Imaginons cinq joueurs A, B, C, D, E et faisons correspondre chaque partie de leur jeu supposé continu à chacun des éléments de temps compris entre zéro et t.

Le jeu de A et de B est le jeu fictif qui a été défini au n° 623. A la partie d'ordre τ ou, si l'on veut, à l'instant τ, le joueur A perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des x et le joueur B perd une somme à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des y.

Si l'on désigne par x' la perte totale de A et par y' la perte totale de B, x' et y' sont différents des coordonnées x et y du point M, sauf pour l'époque t.

Lorsqu'il s'agira de probabilités relatives à l'époque t, nous pourrons remplacer x' par x et y' par y; mais, s'il s'agissait d'une autre époque, la substitution conduirait à un résultat erroné.

A chaque instant, les joueurs C et D perdent respectivement des sommes égales aux projections sur les axes de l'accroissement de la vitesse à cet instant.

Le joueur E ferme le jeu, il perd, à chaque instant, la somme des gains de ses adversaires : sa perte totale est $u = -x' - y' - X - Y$.

Le jeu est équitable et les parties successives sont indépendantes; la probabilité pour que, en t parties, les joueurs A, B, C, D perdent respectivement les sommes x', y', X, Y est exprimée par la formule du

n° 564 : il suffit de changer les notations et de poser

$$x_1 = x', \qquad x_2 = y', \qquad x_3 = X, \qquad x_4 = Y.$$

D'après le résultat obtenu au n° 623, on a

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha^2 t^3}{3};$$

on a, de même, d'après le n° 622,

$$\varphi_3 = \varphi_4 = \alpha^2 t.$$

Il reste à calculer les fonctions χ. On a d'abord

$$\chi_{1,2} = \chi_{1,4} = \chi_{2,3} = \chi_{3,4} = 0;$$

considérons par exemple $\chi_{2,3}$: cette quantité s'obtient en prenant le double de la variation moyenne de $y'X$ pour la partie d'ordre τ et en intégrant le résultat entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Or, pour toute partie ou pour tout intervalle élémentaire dt, la valeur moyenne de la variation du produit $y'X$ est nulle, car à toute valeur positive de cette variation correspond une valeur négative de même probabilité ; on a donc $\chi_{2,3} = 0$.

Nous allons maintenant calculer $\chi_{1,3}$ et $\chi_{2,4}$. Supposons que, à la partie d'ordre τ, les quantités x', y', X, Y aient pour valeurs x'_1, x'_2, X_1, Y_1.

Pour former $\chi_{1,3}$, on doit calculer le double de la valeur moyenne de la variation du produit $x'_1 X_1$ relatif à la partie d'ordre τ et intégrer le résultat entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Or, à la partie d'ordre τ, il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que x'_1 augmente de $\alpha \cos\theta (t - \tau)$ et X_1 de $\alpha \cos\theta$; il y a donc probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que le produit $x'_1 X_1$ augmente de la quantité

$$[x'_1 + \alpha \cos\theta (t - \tau)][X_1 + \alpha \cos\theta] - x'_1 X_1,$$

c'est-à-dire de la quantité

$$x'_1 \alpha \cos\theta + X_1 \alpha \cos\theta (t - \tau) + \alpha^2 \cos^2\theta (t - \tau).$$

Pour calculer la variation moyenne de $x'_1 X_1$, il faut multiplier l'ex-

pression précédente par $\frac{d\theta}{2\pi}$ et intégrer entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, le résultat est $\frac{\alpha^2}{2}(t-\tau)$.

Pour obtenir $\chi_{1,3}$, on doit multiplier cette dernière quantité par deux et intégrer entre les limites $\tau = 0$ et $\tau = t$; on a donc finalement

$$\chi_{1,3} = \chi_{2,4} = \frac{\alpha^2 t^2}{2}.$$

En se reportant à la formule du n° 564, on obtient l'expression de la probabilité pour que les joueurs A, B, C, D perdent respectivement les sommes x', y', X, Y en t parties; cette expression est

$$\frac{e^{-\frac{(x'^2+y'^2)-t(\mathrm{X}x'+\mathrm{Y}y')+\frac{t^2}{3}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)}{\frac{\alpha^2 t^3}{12}}}}{\frac{\pi^2}{12}\alpha^4 t^4}\,dx'\,dy'\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}.$$

A l'époque t, $x' = x$, $y' = y$ et, d'après la définition de ces quantités, les probabilités qui leur sont relatives sont égales. Il en résulte que *la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour coordonnées x et y et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes sont X et Y est*

$$\frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)-t(\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y)+\frac{t^2}{3}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)}{\frac{\alpha^2 t^3}{12}}}}{\frac{\pi^2}{12}\alpha^4 t^4}\,dx\,dy\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}.$$

625. **Cas d'une résistance de milieu.** — On suppose que la résistance est proportionnelle à la vitesse et que ses composantes sont mk X et mk Y, m étant la masse du point.

Quelle est la probabilité pour que le point matériel ait, à l'époque t, une vitesse dont les composantes sont X et Y?

Supposons que trois joueurs H, K, L perdent, à chaque instant, des sommes respectivement égales aux accroissements de X, Y, $-$X$-$Y pendant cet instant et que, à l'époque t, les composantes de la vitesse soient X et Y; nous allons étudier les variations de ces quantités dans l'intervalle de temps élémentaire suivant.

Pour cette partie, il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que le joueur H perde la somme $\alpha\cos\theta - kX$. Son espérance mathématique pour cette partie est donc

$$-\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}(\alpha\cos\theta - kX) = kX;$$

elle est proportionnelle à la perte actuelle X.

La fonction d'instabilité du jeu de H pour la même partie est

$$2\left[\int_0^{2\pi}(\alpha\cos\theta - kX)^2\frac{d\theta}{2\pi} - k^2X^2\right] = \alpha^2.$$

Cette quantité est constante.

On serait conduit au même résultat pour le jeu de K; l'espérance mathématique serait kY et la fonction d'instabilité, α^2.

Il faut maintenant étudier le jeu de L.

Pour la partie considérée, il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que L perde la somme

$$-\alpha\cos\theta + kX - \alpha\sin\theta + kY;$$

son espérance mathématique pour cette partie est donc

$$-\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}(-\alpha\cos\theta + kX - \alpha\sin\theta + kY) = k(-X - Y);$$

elle est proportionnelle à la perte actuelle $(-X - Y)$.

La fonction d'instabilité du jeu de L pour cette partie est de même

$$2\left[\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}(-\alpha\cos\theta + kX - \alpha\sin\theta + kY)^2 - k^2(-X - Y)^2\right] = 2\alpha^2.$$

elle est constante.

Les espérances étant proportionnelles aux pertes actuelles et les fonctions d'instabilité étant constantes, il suffit, pour obtenir la solution du problème proposé, d'appliquer la formule du n° 551.

La probabilité pour que, en t parties, le joueur H ait perdu la somme X et le joueur K la somme Y, c'est-à-dire la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour composantes de vitesse X,

Y, est

$$\frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{\frac{\alpha^2}{2k}(1-e^{-2kt})}}}{\pi\frac{\alpha^2}{2k}(1-e^{-2kt})}dX\,dY.$$

La probabilité pour que, à l'époque t, la vitesse ait une valeur donnée v est

$$\frac{2v\,e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{2k}(1-e^{-2kt})}}}{\frac{\alpha^2}{2k}(1-e^{-2kt})}dv.$$

626. Lorsque t croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la loi finale exprimée par la formule

$$\frac{2v\,e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{2k}}}}{\frac{\alpha^2}{2k}}dv.$$

La vitesse moyenne finale est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{2k}}\cdot$

La vitesse probable finale est $0{,}832\ldots\frac{\alpha}{\sqrt{2k}}\cdot$

La vitesse finale la plus probable est $0{,}706\ldots\frac{\alpha}{\sqrt{2k}}\cdot$

La théorie des probabilités connexes à laquelle nous avons été ramenés nous permettrait de résoudre les mêmes questions en supposant que la résistance est égale au produit de la vitesse par une fonction arbitraire du temps.

627. **Espace à trois dimensions.** — Nous allons étudier le mouvement d'un point matériel sollicité par une force dont la grandeur est constante et dont la direction varie au hasard, toutes les directions ayant égale vraisemblance.

Le mouvement du point considéré M peut être rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, la position initiale du point étant prise pour origine des coordonnées.

628. Problème relatif aux vitesses. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit animé d'une vitesse dont les composantes sont* X, Y, Z?

On doit supposer que quatre joueurs A, B, C, D perdent, à chaque instant, des sommes égales aux accroissements de X, Y, Z, $(-X-Y-Z)$ à cet instant; la probabilité cherchée est la probabilité pour que A perde la somme X; B, la somme Y, et C, la somme Z en t parties.

Le jeu est équitable et d'ailleurs identique à celui qui a été étudié au n° 589, il suffit de remplacer v par α.

La probabilité cherchée est

$$\frac{e^{-\frac{X^2+Y^2+Z^2}{\frac{2\alpha^2 t}{3}}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2\alpha^2 t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dX\,dY\,dZ.$$

La probabilité pour que, au bout du temps t, le point M ait une vitesse v est

$$\frac{4v^2 e^{-\frac{v^2}{\frac{2\alpha^2 t}{3}}}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{2\alpha^2 t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dv.$$

La vitesse moyenne est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2\alpha^2 t}{3}}.$$

La vitesse moyenne quadratique est

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2\alpha^2 t}{3}}.$$

La vitesse la plus probable est

$$1{,}09\ldots\sqrt{\frac{2\alpha^2 t}{3}}.$$

629. Analogie avec le mouvement de la chaleur. — L'équation du mouvement de la probabilité dans un espace à trois dimen-

sions (n° 562)

$$\frac{\varphi'_1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\varphi_2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\varphi'_3}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\chi'_{1,2}}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\chi'_{1,3}}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}+\frac{\chi'_{2,3}}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}$$

est plus complexe que celle du mouvement de la chaleur, mais elle s'y réduit dans un cas très particulier lorsque, l'uniformité étant supposée, on a en même temps

$$\chi_{1,2}=0, \qquad \chi_{1,3}=0, \qquad \chi_{2,3}=0,$$
$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3;$$

l'équation du mouvement des probabilités n'est autre alors que l'équation de Fourier

$$\frac{\varphi'_1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial f}{\partial t}.$$

C'est précisément ce cas particulier que nous avons rencontré dans les problèmes traités aux n°s 589 et 628.

Ces problèmes sont analogues à celui qui consiste à déterminer la température à l'époque t du point x, y, z d'un espace indéfini quand, à l'origine du temps, il s'est produit à l'origine des coordonnées une source instantanée de chaleur.

Pareillement, les problèmes traités aux n°s 593 et 622 sont analogues à celui qui consiste à déterminer la distribution des températures à l'époque t dans un espace indéfini à deux dimensions lorsque, à l'origine du temps, il s'est produit à l'origine des coordonnées une source instantanée de chaleur.

630. **Problème relatif aux positions.** — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une situation donnée ?*

Il s'agit de calculer la probabilité pour que le point M ait pour coordonnées x, y, z à l'époque t.

Comme dans les cas précédents, nous pouvons décomposer l'action de la force en ses actions successives pendant les intervalles de temps (zéro, dt), (dt, $2\,dt$), ($2\,dt$, $3\,dt$), ...

Au bout du premier intervalle dt, sous l'action de la force, le point

M a parcouru une distance $\alpha\, dt$ dans une direction quelconque et ce mouvement se perpétue, d'après le principe de l'inertie, avec la même vitesse jusqu'à l'époque t.

Le point parcourt donc la distance αt dans la première direction qui lui est imprimée.

Pendant le second intervalle de temps (compris entre dt et $2\, dt$), la force aura communiqué au point matériel, dans une direction quelconque, un nouveau déplacement $\alpha\, dt$ indépendant du premier et, en vertu de l'inertie, ce second mouvement se perpétuera jusqu'à l'époque t. Le second mouvement fera donc parcourir au point M une distance $\alpha(t-dt)$.

A l'instant τ, la force communiquera au point matériel, dans une direction quelconque, un mouvement indépendant des précédents qui se perpétuera jusqu'à l'époque t et qui fera parcourir au point M la distance $\alpha(t-\tau)$.

La coordonnée x du point M à l'époque t sera la somme des projections sur l'axe des x des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires.

La probabilité pour que, finalement, le point matériel ait pour coordonnées x, y, z est la probabilité pour que les sommes des projections des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires aient respectivement pour valeurs x, y, z.

Supposons maintenant que quatre joueurs A, B, C, D jouent aux conditions suivantes : A la partie d'ordre τ, le joueur A perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des x. Le joueur B perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des y. Le joueur C perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des z. Le joueur D gagne la somme des pertes de A, B, C.

La probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour coordonnées x, y, z est la probabilité pour que les sommes des projections considérées soient x, y, z, ou pour que les joueurs A, B, C perdent respectivement les sommes x, y, z en t parties.

Le jeu étant équitable et admettant l'indépendance, la probabilité cherchée est exprimée par la formule du nº 565 ; il suffit de calculer les fonctions φ et χ d'après les données du problème.

Pour obtenir φ_1 (égal à φ_2 et à φ_3 par raison de symétrie), on doit former le double de la valeur moyenne des carrés des pertes du joueur A pour la partie d'ordre τ et intégrer ensuite entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Soient ξ, η, ζ les projections de la longueur $\alpha(t-\tau)$ sur les axes, c'est-à-dire les pertes de A, B, C à la partie d'ordre τ; on a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \alpha^2(t-\tau)^2,$$

ou, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\text{VM}\,\xi^2 + \text{VM}\,\eta^2 + \text{VM}\,\zeta^2 = \alpha^2(t-\tau)^2.$$

Ces valeurs moyennes étant égales par raison de symétrie, on a

$$\text{VM}\,\xi^2 = \text{VM}\,\eta^2 = \text{VM}\,\zeta^2 = \frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{3}.$$

La valeur moyenne des carrés des pertes du joueur A à la partie d'ordre τ est donc $\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{3}$, on en déduit

$$\varphi_1 = \int_0^t 2\,\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{3}\,d\tau = \frac{2\alpha^2 t^3}{9}.$$

Pour obtenir $\chi_{1,2}$, par exemple, on doit former le double de la valeur moyenne de $\xi\eta$ et intégrer entre $\tau = 0$ et $\tau = t$. Or la valeur moyenne de $\xi\eta$ est nulle car, à chaque valeur positive de ce produit, correspond une valeur négative de même probabilité, dont $\chi_{1,2}$ est nul.

Remplaçant dans la formule du n° 564 les fonctions φ par $\frac{2\alpha^2 t^3}{9}$ et les fonctions χ par zéro, on obtient *la probabilité pour que le point matériel ait pour coordonnées x, y, z à l'époque t* :

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{2\alpha^2 t^3}{9}}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2\alpha^2 t^3}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

631. La probabilité pour que, au bout du temps t, le point M soit à

une distance r de son point de départ est

$$\frac{4 r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{2\alpha^2 t^3}{9}}}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{2\alpha^2 t^3}{9}\right)^{\frac{3}{2}}} dr.$$

La valeur moyenne de r est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2\alpha^2 t^3}{9}}.$$

La valeur moyenne quadratique de r est

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2\alpha^2 t^3}{9}}.$$

La valeur la plus probable de r est

$$\sqrt{\frac{2\alpha^2 t^3}{9}}.$$

La valeur probable de r est

$$1,09\ldots\sqrt{\frac{2\alpha^2 t^3}{9}}.$$

632. **Problèmes relatifs aux situations et aux vitesses.** — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une position donnée (x, y, z) et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes sont* X, Y, Z?

Imaginons sept joueurs A, B, C, D, E, F, G et faisons correspondre chaque partie de leur jeu supposé continu à chacun des éléments de temps compris entre zéro et t.

Le jeu de A, de B et de C est le jeu fictif définitif au n° 630. A la partie d'ordre τ, ou, si l'on veut, à l'instant τ, le joueur A perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des x, le joueur B perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des y et le joueur C perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des z.

Si l'on désigne par x', y', z' les pertes totales de A, B, C, ces quan-

tités sont différentes des coordonnées x, y, z du point M, sauf pour l'époque t.

Lorsqu'il s'agira des probabilités relatives à l'époque t, nous pourrons remplacer x', y', z', par x, y, z; mais s'il s'agissait d'une autre époque, la substitution conduirait à un résultat erroné.

A chaque instant les joueurs D, E, F perdent respectivement des sommes égales aux projections sur les axes de l'accroissement de la vitesse à cet instant.

Le joueur G ferme le jeu, il perd, à chaque instant, la somme des gains de ses adversaires; sa perte totale est $u = -x' - y' - z' - X - Y - Z$.

Le jeu étant équitable et les parties successives étant indépendantes, la probabilité pour que, en t parties, les joueurs A, B, C, D, E, F perdent respectivement les sommes x', y', z', X, Y, Z, est exprimée par la formule du n° 564; il suffit de changer les notations et de poser

$$x_1 = x', \qquad x_2 = y', \qquad x_3 = z', \qquad x_4 = X, \qquad x_5 = Y, \qquad x_6 = Z.$$

On a, d'après le résultat obtenu au n° 630,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{2\alpha^2 t^3}{9},$$

et, d'après le n° 628,

$$\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = \frac{2\alpha^2 t}{3}.$$

Il reste à calculer les fonctions χ.

Les fonctions χ telles que $\chi_{1,5}$ qui correspondent à une quantité x' relative à un axe et à une composante de la vitesse suivant un autre axe sont nulles. Considérons, par exemple, $\chi_{1,5}$; cette quantité s'obtient en prenant le double de la variation moyenne de x' Y pour la partie d'ordre τ et en intégrant le résultat entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Or, pour toute partie ou pour tout intervalle élémentaire dt, la valeur moyenne de la variation du produit x' Y est nulle, car à toute valeur positive de cette variation correspond une valeur négative de même probabilité; on a donc $\chi_{1,5} = 0$.

Les fonctions telles que $\chi_{1,2}$ relatives à deux quantités de même nature x', y' ou telles que $\chi_{4,5}$ relatives à deux quantités de même nature X, Y sont nulles, comme nous l'avons vu.

Il faut maintenant calculer les fonctions χ telles que $\chi_{1,4}$ qui corres-

pondent à une quantité x' suivant un axe et à une composante de la vitesse X suivant le même axe.

Supposons que, à la partie d'ordre τ, les quantités x', y', z', X, Y, Z aient pour valeurs x'_1, y'_1, z'_1, X_1, Y_1, Z_1.

Pour former $\chi_{1,4}$ on doit calculer le double de la valeur moyenne de la variation du produit $x'_1 X_1$ à la partie d'ordre τ et intégrer entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Il résulte de l'égale vraisemblance de toutes les directions que la probabilité pour que, dans un intervalle élémentaire de temps, la projection de la vitesse sur l'axe des x s'accroisse de la quantité λ (nécessairement comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$) est $\frac{d\lambda}{2\alpha}$, c'est-à-dire que toutes les valeurs de cet accroissement entre $\pm\alpha$ ont égale vraisemblance.

Si, à la partie d'ordre τ, la composante X augmente de la quantité λ, x' augmente de la quantité $\lambda(t-\tau)$.

Il y a donc, à la partie d'ordre τ, probabilité $\frac{d\lambda}{2\alpha}$ pour que le produit $x'_1 X_1$ augmente de la quantité

$$[x'_1 + \lambda(t-\tau)](X_1 + \lambda) - x'_1 X_1,$$

c'est-à-dire de la quantité

$$\lambda^2(t-\tau) + \lambda[X_1(t-\tau) + x'_1].$$

Pour calculer la variation moyenne de $x'_1 X_1$, on doit multiplier l'expression précédente par $\frac{d\lambda}{2\alpha}$ et intégrer entre les limites $\lambda = -\alpha$ et $\lambda = +\alpha$; le résultat est

$$\frac{\alpha^2}{3}(t-\tau)\,d\tau.$$

Pour obtenir $\chi_{1,4}$, on doit multiplier cette dernière quantité par deux et intégrer entre les limites $\tau = 0$ et $\tau = t$; on a donc finalement

$$\chi_{1,4} = \chi_{2,5} = \chi_{3,6} = \frac{\alpha^2 t^2}{3}.$$

En se reportant à la formule générale, et en y substituant les valeurs trouvées pour les fonctions φ et χ, on obtient la probabilité pour que, en t parties, les joueurs A, B, C, D, E, F perdent respectivement les sommes x', y', z', X, Y, Z.

A l'époque t, $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ et, d'après la définition de ces quantités, les probabilités qui leur sont relatives sont égales, de sorte que la probabilité pour que les joueurs A, B, C, D, E, F perdent les sommes x', y', z', X, Y, Z en t parties est *la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour coordonnées x, y, z et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes sont* X, Y, Z; cette probabilité est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{(x^2+y^2+z^2)-t(\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+\mathrm{Z}z)+\frac{t^2}{3}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)}{\frac{\alpha^2 t^3}{18}}}}{\pi^3 \frac{\alpha^6 t^6}{(3\sqrt{3})^3}}\, dx\, dy\, dz\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}.$$

Si l'on intègre cette quantité par rapport à x, à y et à z entre $-\infty$ et $+\infty$, on retrouve la formule du n° 628, résultat évident.

Si l'on intègre par rapport à X, à Y et à Z entre $-\infty$ et $+\infty$, on retrouve la formule du n° 630, résultat évident.

633. **Cas d'une résistance de milieu.** — On suppose que la résistance est proportionnelle à la vitesse et que ses composantes sont $mk\mathrm{X}$, $mk\mathrm{Y}$, $mk\mathrm{Z}$, m étant la masse du point.

Quelle est la probabilité pour que le point matériel ait, à l'époque t, une vitesse dont les composantes sont X, Y, Z?

Il faut raisonner comme précédemment en assimilant la question posée à un problème relatif à un jeu; on est alors ramené aux probabilités connexes du premier genre et la probabilité demandée est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2}{\frac{\alpha^2}{3k}(1-e^{-2kt})}}}{\pi\sqrt{\pi}\left[\frac{\alpha^2}{3k}(1-e^{-2kt})\right]^{\frac{3}{2}}}\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}.$$

La probabilité pour que, à l'époque t, la vitesse ait une valeur donnée v est

$$\frac{4v^2 e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{3k}(1-e^{-2kt})}}}{\sqrt{\pi}\left[\frac{\alpha^2}{3k}(1-e^{-2kt})\right]^{\frac{3}{2}}}\, dv.$$

634. Lorsque t croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la loi finale exprimée par la formule

$$\frac{4v^2 e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{3k}}}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{\alpha^2}{3k}\right)^{\frac{3}{2}}} dv.$$

La vitesse moyenne finale est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{3k}}.$$

La vitesse finale probable est

$$1{,}09\ldots\sqrt{\frac{\alpha^2}{3k}}.$$

La vitesse finale la plus probable est

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{3k}}.$$

635. **Mécanique du corps solide.** — Relativement à la mécanique des systèmes, nous étudierons seulement le cas d'un solide plan mobile autour d'un de ses points qui est fixe; un certain nombre de forces dont la direction varie au hasard agissant en des points donnés du solide.

Celui-ci étant initialement animé d'une vitesse angulaire ω_0, quelle est la probabilité pour qu'il devienne immobile pour la première fois à l'époque t?

Imaginons un joueur H qui, dans chaque élément de temps, gagnerait une somme égale à l'augmentation de la vitesse angulaire ou perdrait une somme égale à la diminution de cette vitesse pendant cet élément de temps; le problème proposé se ramène immédiatement au suivant :

Un joueur H possède une fortune ω_0, quelle est la probabilité pour qu'il soit ruiné en jouant exactement t parties?

C'est un problème de probabilités du second genre qui a été résolu dans le dixième Chapitre.

Toutes les directions de toutes les forces ont égale vraisemblance, c'est ce que nous entendons par le terme de forces variant au hasard.

Dans ces conditions, une augmentation de vitesse angulaire à un instant quelconque a même probabilité qu'une diminution de vitesse égale et le jeu de H est équitable ; il suffit alors d'appliquer la formule du n° 339.

La probabilité cherchée est exprimée par la formule

$$\frac{\omega_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{t\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\, t\sqrt{t\varphi_1}}\,dt,$$

dans le cas le plus simple où le couple dû au hasard est constant et, plus généralement, par la formule

$$\frac{\omega_0\,\varphi'(t)\,e^{-\frac{\omega_0^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(t)\sqrt{\varphi(t)}}\,dt,$$

lorsque le couple varie suivant une fonction donnée du temps.

636. La valeur du couple se déduit des grandeurs données des forces qui agissent en chaque point du solide.

Lorsque la fonction $\varphi(t)$ est arbitraire (elle doit être nécessairement positive et croissante), les résultats qu'on peut déduire de l'expression précédente dépendent de la forme de cette fonction ; le cas le plus simple, qui correspond à la première formule, conduit à des résultats intéressants :

Le solide finira par s'arrêter, car si l'on intègre l'expression de la probabilité entre $t = 0$ et $t = \infty$, on trouve l'unité pour valeur de l'intégrale, l'arrêt se produira donc nécessairement.

L'époque la plus probable de l'arrêt est $t = \frac{2\omega_0^2}{3\varphi_1}$.

L'époque probable de l'arrêt correspond à la durée qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassée ; cette époque probable est donnée par la formule $t = \frac{4,4\ldots\omega_0^2}{\varphi_1}$.

L'époque moyenne de l'arrêt est, par définition, l'espérance mathématique d'un joueur K qui devrait toucher une somme proportionnelle

au temps que met le solide pour s'immobiliser. Cette espérance est infinie.

637. **Cas d'un frottement.** — Nous avons supposé que le mouvement de rotation se produisait sans frottement ; cette hypothèse n'est pas nécessaire à la condition d'admettre que les forces agissantes soient constantes en grandeur et que le point fixe soit un point de symétrie pour le solide, de sorte que le frottement soit dû uniquement aux forces agissantes.

Le jeu de H auquel nous pouvons toujours ramener le problème proposé quelles que soient les conditions admises n'est plus équitable, mais il est uniforme et il suffit de lui appliquer l'analyse développée au n° 342.

La probabilité pour que le solide soit immobilisé pour la première fois à l'époque t est

$$\frac{\omega_0 e^{-\frac{(t\psi_1+\omega_0)^2}{t\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,t\sqrt{t\varphi_1}}\,dt.$$

Le solide est soumis à l'action de deux couples : l'un, dû au hasard, agit indifféremment dans les deux sens ; l'autre, dû au frottement, est toujours retardateur.

Du fait de ce second couple, le jeu de H est désavantageux. ψ_1 (qui est nécessairement négatif) est proportionnel à la valeur moyenne du couple dû au frottement, c'est-à-dire proportionnel à la résultante de toutes les forces pendant l'élément de temps dt.

φ_1 dépend du couple dû au hasard et du couple dû au frottement pendant l'élément dt.

638. La probabilité pour que l'immobilité se produise pour la première fois avant l'époque t est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\omega_0+t\psi_1}{\sqrt{t\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{4\omega_0\psi_1}{\varphi_1}}\int_{\frac{\omega_0-t\psi_1}{\sqrt{t\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

L'immobilité finira nécessairement par se produire, puisqu'elle se produirait même si le frottement n'existait pas.

La valeur moyenne du temps au bout duquel se produira pour la première fois l'immobilité n'est plus infinie comme dans le cas considéré précédemment : elle a pour expression $-\frac{\omega_0}{\psi_1}$.

639. Pour montrer comment on peut calculer ψ_1 et φ_1, nous allons considérer le cas très simple où une seule force F dont la direction varie au hasard est appliquée au point A dont la distance à l'axe O est r.

La pression exercée sur l'axe est constamment égale à F; le couple dû au frottement est donc proportionnel à F (soit par exemple aF son moment) et ψ_1 est proportionnel à aF.

Il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que F fasse, à un instant quelconque, un angle θ avec OA et, par suite, pour que le couple dû au hasard ait pour moment $\mathrm{F}r\sin\theta$.

Il y a donc, à chaque instant, probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que le couple résultant ait pour moment $\mathrm{F}r\sin\theta - a\mathrm{F}$.

Lorsque le couple résultant a un moment donné C, la vitesse de rotation du solide augmente de la quantité $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{M}k^2}$, k étant le rayon de giration du solide, relativement au point O, et M sa masse.

Lorsque la vitesse de rotation augmente de la quantité $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{M}k^2}$, le joueur A gagne la somme $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{M}k^2}$.

Il y a donc, dans chaque élément de temps, probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que le joueur H gagne la somme

$$\frac{\mathrm{F}r\sin\theta - a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2}.$$

ψ_1 est la valeur moyenne des gains de H dans un élément de temps; on a donc

$$\psi_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{F}r\sin\theta - a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2}\,\frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2}.$$

φ_1 est, pour un élément de temps, le double de la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes de H diminué du double du carré de la

valeur moyenne des gains ; on a donc

$$\varphi_1 = \int_0^{2\pi} 2\left[\left(\frac{\mathrm{F}r\sin\theta - a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2}\right)^2 - \left(\frac{a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2}\right)^2\right]\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{\mathrm{F}^2 r^2}{(\mathrm{M}k^2)^2}.$$

640. Nous voyons, par ce qui précède, que les progrès de la mécanique du hasard sont intimement liés à ceux de la théorie des probabilités connexes ; c'est cette dernière théorie qui nous a permis de traiter le problème du mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant et, inversement, la recherche de la loi des espaces nous a conduits à une nouvelle classe de probabilités connexes que la théorie pure n'eût certainement pas fait connaître.

D'autres problèmes de la mécanique du hasard conduiraient à l'étude de nouvelles sortes de probabilités connexes :

Reprenons, par exemple, le cas du mouvement d'un solide plan autour d'un point fixe par rapport auquel il est symétrique : le solide part du repos, il est soumis à l'action de forces dépendant du hasard et à l'action du frottement de l'axe. Si l'on veut déterminer la probabilité pour que le solide ait une vitesse angulaire ω à l'époque t, on assimile, suivant notre méthode générale, le problème proposé à une question relative à un jeu. On suppose qu'un joueur H perde, à chaque instant, une somme égale à l'augmentation de la vitesse à cet instant ; la probabilité d'une vitesse ω à l'époque t est la probabilité d'une perte ω en t parties.

Le frottement étant toujours retardateur, le jeu considéré est avantageux tant que le joueur perd, c'est-à-dire tant que le corps tourne dans un sens ; il devient désavantageux quand la rotation se produit dans l'autre sens, c'est-à-dire quand le joueur gagne. La question proposée conduit ainsi à une nouvelle sorte de connexité.

Considérons toujours le même problème, mais supposons que le solide ne soit pas symétrique relativement à son axe ; le frottement dépendra alors des forces d'inertie, c'est-à-dire du carré de la vitesse. Nous serons ainsi conduits à étudier de nouvelles probabilités connexes telles que l'espérance élémentaire dépende du carré de la perte actuelle.

La mécanique du hasard conduit donc à la considération de nouvelles sortes de probabilités connexes.

CHAPITRE XXII.

PROBABILITÉS INVERSES.

641. La théorie des probabilités continues est indépendante de la théorie des probabilités discontinues, et c'est à ce fait qu'elle doit sa grande généralité.

Dans certains cas particuliers on peut déduire les formules continues des formules discontinues correspondantes grâce à l'emploi de l'égalité asymptotique de Stirling. Ce procédé exige évidemment la connaissance préalable des probabilités discontinues; on ne peut l'employer souvent, mais il conduit parfois très simplement au résultat.

Rappelons que la formule de Stirling

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$$

exprime une égalité asymptotique; la différence entre ses deux membres croît indéfiniment avec n, mais leur rapport tend vers un.

Les inégalités suivantes

$$n! > e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n},$$
$$n! < e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12n}}$$

montrent la grande approximation fournie par la formule de Stirling. Un exemple numérique montrera encore l'approximation obtenue par cette formule; en supposant, par exemple, que $n = 20$, on a

$$20! = 2432902008176640000,$$
$$e^{-20}\, 20^{20} \sqrt{40\pi} = 2422786385510400000;$$

le rapport des deux nombres est 1,00417.

642. **Formules asymtotiques relatives aux épreuves répé-**

tées. — La probabilité d'un événement est p, la probabilité de l'événement contraire est $q = 1 - p$. La probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement se produise m fois est (n° 42)

$$\frac{\mu!}{m!(\mu - m)!} p^m q^{\mu - m}.$$

La plus grande probabilité correspond au cas où $m = \mu p$.

La valeur moyenne du nombre des arrivées de l'événement est μp.

Le cas en quelque sorte normal est celui pour lequel l'événement considéré et l'événement contraire se produisent proportionnellement à leur probabilité. Les autres cas sont définis par leur différence à celui-là.

Nous dirons que l'*écart* est x quand l'événement se sera produit $\mu p + x$ fois.

La probabilité pour que l'écart soit x est, d'après la formule précédente,

$$\frac{\mu!}{(\mu p + x)!(\mu q - x)!} p^{\mu p + x} q^{\mu q - x}.$$

643. Transformons cette formule par l'égalité de Stirling en supposant $\frac{x}{\mu}$ négligeable et $\frac{x}{\sqrt{\mu}}$ fini. Cette formule se réduit à la suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{\mu p + x + \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{\mu q - x + \frac{1}{2}}}.$$

On a

$$\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{\mu p + x + \frac{1}{2}} = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\mu p} - \frac{x^2}{2\mu^2 p^2} + \frac{x^3}{3\mu^3 p^3} - \ldots\right),$$

$$\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{\mu q - x + \frac{1}{2}} = \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{\mu q} - \frac{x^2}{2\mu^2 q^2} - \frac{x^3}{3\mu^3 q^3} - \ldots\right);$$

en additionnant et en supprimant les quantités négligeables en vertu des hypothèses faites, on obtient

$$\log\left[\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{\mu p + x + \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{\mu q - x + \frac{1}{2}}\right] = \frac{x^2}{2\mu}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

En remarquant que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{pq}$ et en passant des logarithmes aux nombres, on obtient

$$\left(1+\frac{x}{\mu p}\right)^{\mu p+x+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{\mu q}\right)^{\mu q-x+\frac{1}{2}}=e^{\frac{x^2}{2\mu pq}}.$$

En portant cette valeur dans l'expression ci-dessus, elle devient

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Telle est la formule asymptotique exprimant la probabilité de l'écart x en μ épreuves.

C'est celle que nous avions obtenue par un autre procédé (n° 262).

644. **Cas de plusieurs variables.** — A chaque épreuve, n événements $A_1, A_2, \ldots A_n$, de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ peuvent se produire et s'excluent mutuellement de sorte que $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$. La probabilité pour que, en μ épreuves, le premier événement se produise m_1 fois, le second m_2 fois, ..., le $n^{\text{ième}}$ m_n fois $(m_1+m_2+\ldots+m_n=\mu)$ est (n° 50)

$$\frac{\mu!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}.$$

La plus grande probabilité correspond au cas où $m_1=\mu p_1$, $m_2=\mu p_2, \ldots, m_n=\mu p_n$.

La valeur moyenne du nombre des arrivées du premier événement est μp_1, celle qui correspond au second événement est μp_2, etc.

Le cas en quelque sorte normal est celui pour lequel les événements se produisent proportionnellement à leur probabilité. Les autres cas sont définis par leurs différences à celui-ci.

Nous dirons que les *écarts* sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ quand l'événement A_1 se sera produit μp_1+x_1 fois, l'événement A_2, μp_2+x_2 fois, ..., l'événement A_n, μp_n+x_n fois $(x_1+x_2+\ldots+x_n=0)$.

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en μ épreuves

est, d'après la formule précédente,

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1+x_1)!\,(\mu p_2+x_2)!\ldots(\mu p_n+x_n)!}\,p_1^{\mu p_1+x_1}\,p_2^{\mu p_2+x_2}\ldots p_n^{\mu p_n+x_n}.$$

645. Transformons cette formule par l'égalité de Stirling en supposant μ assez grand pour que $\frac{x_1}{\mu}$, $\frac{x_2}{\mu}$, $\cdots$ soient négligeables, et $\frac{x_1}{\sqrt{\mu}}$, $\frac{x_2}{\sqrt{\mu}}$, $\cdots$ finis. L'expression précédente devient

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}\left(1+\frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1+x_1+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x_2}{\mu p_2}\right)^{\mu p_2+x_2+\frac{1}{2}}\cdots\left(1+\frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n+x_n+\frac{1}{2}}}.$$

On a

$$\log\left(1+\frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1+x_1+\frac{1}{2}}=\left(\mu p_1+x_1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_1}{\mu p_1}-\frac{x_1^2}{2\mu^2p_1^2}+\frac{x_1^3}{3\mu^3p_1^3}-\ldots\right),$$

. . . . ,

$$\log\left(1+\frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n+x_n+\frac{1}{2}}=\left(\mu p_n+x_n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_n}{\mu p_n}-\frac{x_n^2}{2\mu^2p_n^2}+\frac{x_n^3}{3\mu^3p_n^3}-\ldots\right);$$

en additionnant et en supprimant les quantités négligeables en vertu des hypothèses faites, on obtient

$$\log\left[\left(1+\frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1+x_1+\frac{1}{2}}\cdots\left(1+\frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n+x_n+\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2\mu}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right];$$

en revenant des logarithmes aux nombres et en portant cette valeur dans l'expression ci-dessus, elle devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}.$$

Telle est la formule asymptotique exprimant la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, $\ldots$, x_n en μ épreuves.

En réalité la formule contient seulement $n-1$ variables x puisque $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ et elle devrait être multipliée par un infiniment petit tel que $dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}$ ou $dx_2dx_3\ldots dx_n$ formé par la suppression d'un des éléments de la quantité $dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}dx_n$.

Afin que la formule reste symétrique, nous nous garderons d'éliminer aucune variable et nous n'écrirons l'infiniment petit que dans les cas où une intégration devra être effectuée.

646. La formule asymptotique

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1+x_1)!\,(\mu p_2+x_2)!\ldots(\mu p_n+x_n)!}\,p_1^{\mu p_1+x_1}p_2^{\mu p_2+x_2}\ldots p_n^{\mu p_n+x_n}$$
$$=\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}$$

que nous venons de démontrer nous sera souvent utile; elle suppose que μ est un grand nombre, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des nombres positifs ayant pour somme un et que $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

647. La somme des probabilités de tous les cas possibles est un, on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}=1;$$

d'après notre démonstration la formule est asymptotique, mais on peut démontrer directement qu'elle est vraie quel que soit μ.

648. On peut encore appliquer la formule de Stirling à la question suivante :

Une urne renferme k_1 boules blanches, k_2 boules noires, ..., k_n boules vertes; on en extrait μ boules (soit ensemble, soit successivement sans les remplacer dans l'urne); la probabilité pour que, sur les μ boules, il y ait m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., m_n boules vertes $(m_1+m_2+\ldots+m_n=\mu)$ est (n° 75)

$$\frac{\mu!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,\frac{k_1!}{(k_1-m_1)!}\,\frac{k_2!}{(k_2-m_2)!}\cdots\frac{k_n!}{(k_n-m_n)!}\,\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n-\mu)!}{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}.$$

La valeur moyenne du nombre des boules blanches qui sortent en μ épreuves est $\mu\,\dfrac{k_1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}\cdot$ La plus grande probabilité lorsque

μ est un grand nombre correspond au cas où $m_1 = \mu \dfrac{k_1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$, $m_2 = \dfrac{\mu k_2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$, ...

Ces dernières valeurs de m_1, m_2, ... correspondent au cas en quelque sorte normal.

Lorsqu'il sortira de l'urne $\dfrac{\mu k_1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} + x_1$ boules blanches, $\dfrac{\mu k_2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} + x_2$ boules noires, ..., $\dfrac{\mu k_n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} + x_n$ boules vertes, nous dirons que les *écarts* sont x_1, x_2, ..., x_n.

On a évidemment $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0$.

Si l'on pose

$$p_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}, \quad p_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}, \quad \ldots \quad p_n = \frac{k_n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n},$$

la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, ..., x_n peut s'écrire

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1 + x_1)!\,(\mu p_2 + x_2)!\ldots(\mu p_n + x_n)!}\;\frac{sp_1!\,sp_2!\ldots sp_n!}{s!}$$
$$\times \frac{(s-\mu)!}{[(s-\mu)p_1 - x_1]!\,[(s-\mu)p_2 - x_2]!\ldots[(s-\mu)p_n - x_n]!},$$

s désignant la somme $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

649. Appliquons à ce résultat la formule du n° 646.

La probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, ... x_n en μ tirages est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{\frac{s-\mu}{s}}\left[\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}} + \frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu\frac{s-\mu}{s}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Si l'on compare cette formule à celle du n° 645, on voit que, dans le cas actuel, les écarts sont diminués dans le rapport de $\sqrt{s-\mu}$ à $\sqrt{s}$.

650. **Probabilités inverses.** — Dans les questions étudiées jusqu'à présent les données de chaque problème comportaient des probabilités connues exactement; nous allons maintenant étudier les cas

où ces probabilités sont données par l'expérience, en admettant toujours que les épreuves passées ou futures sont identiques.

Lorsqu'un événement a pour probabilité r à chaque épreuve, si l'on effectue un grand nombre μ d'épreuves, la valeur moyenne probable et plus probable du nombre des arrivées de l'événement est μr.

Si l'on considère le nombre des arrivées de l'événement comme égal à μr, on commet une erreur relative d'autant plus faible que μ est plus grand.

Inversement : si, sur un grand nombre μ d'épreuves, un événement s'est produit un grand nombre m de fois, la probabilité inconnue de l'événement est très voisine du rapport $\frac{m}{\mu}$ et elle en est d'autant plus voisine que μ est plus grand.

Le fait est évident; on a, en désignant par x l'écart,

$$m = \mu r + x, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{m}{\mu} = r + \frac{x}{\mu},$$

$\frac{x}{\mu}$ tendant vers zéro lorsque μ augmente, $\frac{m}{\mu}$ tend vers r.

Lorsqu'on ignore la valeur de la probabilité d'un événement qui s'est produit m fois en μ épreuves; μ, m et $\mu - m$ étant de grands nombres; il est donc rationnel d'adopter pour cette valeur le rapport $\frac{m}{\mu}$.

Nous adopterons cette valeur sans faire d'abord aucune hypothèse sur les nombres μ, m, $\mu - m$.

Nous supposons donc que, si un événement s'est produit m fois en μ épreuves, dans l'ignorance où l'on est de la valeur exacte r de la probabilité de l'événement, on prend pour mesure de cette quantité le rapport $\frac{m}{\mu} = p$.

On commet ainsi une certaine erreur inconnue, $p - r = \varepsilon$.

L'événement de probabilité r s'étant produit m fois en μ épreuves, l'écart x est défini par l'égalité

$$m = \mu r + x.$$

Puisque $m = \mu p$, cette égalité peut s'écrire

$$p - r = \varepsilon = \frac{x}{\mu}.$$

On en déduit, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\text{VM}\,\varepsilon = \frac{1}{\mu}\,\text{VM}\,x = 0.$$

En adoptant la valeur $\frac{m}{\mu}$, l'erreur commise est nulle, en moyenne.

651. *La valeur moyenne du carré de l'erreur varie en raison inverse du nombre des épreuves.*

De l'égalité $\varepsilon = \frac{x}{\mu}$, on déduit $\varepsilon^2 = \frac{x^2}{\mu^2}$ et

$$\text{VM}\,\varepsilon^2 = \frac{1}{\mu^2}\,\text{VM}\,x^2.$$

La valeur moyenne de x^2 est $\mu r(1-r)$ (n° 32), donc

$$\text{VM}\,\varepsilon^2 = \frac{r(1-r)}{\mu}.$$

Cette égalité démontre le théorème. On doit remarquer que, r n'étant pas connu, la valeur moyenne de ε^2 n'est pas connue, mais on peut affirmer qu'elle varie en raison inverse de μ.

652. La supposition d'un grand nombre d'épreuves permet de calculer la probabilité pour que la valeur $\frac{m}{\mu} = p$ soit erronée de la quantité ε.

D'après l'égalité $\mu\varepsilon = x$, la probabilité pour que l'erreur soit ε est la probabilité pour que l'écart x soit $\mu\varepsilon$; cette probabilité est (n° 643)

$$\frac{e^{-\frac{(\mu\varepsilon)^2}{2\mu r(1-r)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu r(1-r)}}\,d(\mu\varepsilon)$$

ou

$$\frac{\sqrt{\mu}\,e^{-\frac{\mu\varepsilon^2}{2r(1-r)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2r(1-r)}}\,d\varepsilon.$$

Telle est la probabilité pour que la valeur $\frac{m}{\mu}$ soit erronée de ε.

Cette formule montre que *la quantité $\frac{m}{\mu}$ exprime la probabilité avec une précision proportionnelle à la racine carrée du nombre des épreuves.*

653. Cette formule contient la probabilité exacte et inconnue r, mais la supposition des grands nombres permet d'y remplacer $r(1-r)$ par $p(1-p)=pq$; on a, en effet,

$$p=\frac{m}{\mu}=\frac{\mu r+x}{\mu}=r+\frac{x}{\mu},$$

d'où

$$p(1-p)-r(1-r)=(1-2r)\frac{x}{\mu}-\frac{x^2}{\mu^2}.$$

Les termes du second membre sont infiniment petits.

En résumé : Un événement s'étant produit m fois en μ épreuves, m et μ étant de très grands nombres, on considère le rapport $\frac{m}{\mu}=p$ comme représentant la probabilité inconnue de l'événement. La probabilité pour que ce résultat soit erroné de ε est

$$\frac{\sqrt{\mu}\,e^{-\frac{\mu\varepsilon^2}{2pq}}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2pq}}\,d\varepsilon.$$

654. **Cas où il y a plusieurs variables.** — A chaque épreuve n événements peuvent se produire et il s'en produit nécessairement un et un seul.

En μ épreuves, le premier événement s'est produit m_1 fois, le deuxième m_2 fois, ... le $n^{\text{ième}}$ m_n fois $(m_1+m_2+\ldots+m_n=\mu)$.

Dans l'ignorance où l'on est des valeurs exactes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ des probabilités de ces événements $(r_1+r_2+\ldots+r_n=1)$, on prend pour mesure de ces quantités les rapports $\frac{m_1}{\mu}=p_1$, $\frac{m_2}{\mu}=p_2, \ldots,$ $\frac{m_n}{\mu}=p_n(p_1+p_2+\ldots+p_n=1)$.

On commet ainsi des erreurs inconnues $\varepsilon_1=p_1-r_1$, $\varepsilon_2=p_2-r_2, \ldots,$ $\varepsilon_n=p_n-r_n\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n=0)$.

Nous allons chercher la probabilité de ces erreurs en supposant que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soient de très grands nombres.

Les événements de probabilités $r_1, r_2, \ldots, r_n$ s'étant produits respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_n$ fois en μ épreuves, les écarts correspondants (n° 644) sont définis par les égalités

$$m_1=\mu r_1+x_1,\qquad m_2=\mu r_2+x_2,\qquad \ldots,\qquad m_n=\mu r_n+x_n,$$

et comme d'autre part, $m_1 = \mu p_1$, $m_2 = \mu p_2$, ..., $m_n = \mu p_n$, ces égalités peuvent s'écrire

$$\mu(p_1 - r_1) = x_1, \qquad \mu(p_2 - r_2) = x_2, \qquad \ldots, \qquad \mu(p_n - r_n) = x_n$$

ou

$$\mu\varepsilon_1 = x_1, \qquad \mu\varepsilon_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad \mu\varepsilon_n = x_n.$$

La probabilité pour que les erreurs aient pour valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ est donc égale à la probabilité pour que les écarts aient pour valeurs $\mu\varepsilon_1, \mu\varepsilon_2, \ldots, \mu\varepsilon_n$. Cette probabilité est (n° 645)

$$\frac{\mu^{n-1}\, e^{-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{\mu\varepsilon_1^2}{r_1}+\frac{\mu\varepsilon_2^2}{r_2}+\cdots+\frac{\mu\varepsilon_{n-1}^2}{r_{n-1}}+\frac{\mu\varepsilon_n^2}{r_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}},$$

ou

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1}\, e^{-\frac{\mu}{2}\left[\frac{\varepsilon_1^2}{r_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{r_2}+\cdots+\frac{\varepsilon_{n-1}^2}{r_{n-1}}+\frac{\varepsilon_n^2}{r_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}}.$$

Telle est la probabilité pour que les valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ soient respectivement erronées de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Cette formule montre que *les quantités* $\frac{m_1}{\mu}, \frac{m_2}{\mu}, \ldots \frac{m_n}{\mu}$ *expriment les probabilités avec une précision proportionnelle à la racine carrée du nombre des épreuves.*

655. Dans la formule précédente, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont les probabilités exactes et inconnues; mais on peut, comme dans le cas d'une variable, les remplacer par les probabilités observées $p_1, p_2, \ldots, p_n$. La probabilité pour que les valeurs $\frac{m_1}{\mu}, \frac{m_2}{\mu}, \ldots, \frac{m_n}{\mu}$ soient erronées respectivement de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ peut donc s'écrire

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1}\, e^{-\frac{\mu}{2}\left[\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\cdots+\frac{\varepsilon_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

656. **Probabilité des événements futurs d'après les événements observés.** — Les probabilités des événements futurs d'après les événements observés sont essentiellement différentes des probabilités déduites de données exactes, et il est indispensable de montrer sur un exemple simple la dissemblance des deux cas.

Un événement a pour probabilité exacte p; la probabilité pour qu'il se produise deux fois de suite est p^2.

Un événement s'est produit m fois en μ épreuves, $\frac{m}{\mu} = p$; quelle est la probabilité pour que l'événement se produise deux fois de suite?

Nous admettons que, dans l'ignorance où l'on est de la valeur exacte de la probabilité de l'événement, on doit adopter pour cette valeur le rapport du nombre des arrivées de l'événement au nombre total des épreuves. Nous avons vu que, par cette hypothèse, la moyenne de l'erreur est nulle.

La probabilité pour que l'événement se produise deux fois de suite est égale, d'après le principe des probabilités composées, au produit de la probabilité pour qu'il se produise à la première épreuve multipliée par la probabilité pour qu'il se produise à la seconde quand on sait qu'il s'est produit à la première.

La probabilité pour que l'événement se produise à la première épreuve est $\frac{m}{\mu}$.

La probabilité pour qu'il se produise à la seconde épreuve, s'étant produit à la première, est $\frac{m+1}{\mu+1}$, puisque l'événement s'est alors produit $m+1$ fois en $\mu+1$ épreuves.

La probabilité pour que l'événement se produise deux fois de suite est donc

$$\frac{m}{\mu}\frac{m+1}{\mu+1};$$

elle n'est pas égale à $\left(\frac{m}{\mu}\right)^2$.

Les probabilités relatives à une épreuve dépendent, d'après notre hypothèse, des faits qui se sont produits à toutes les épreuves antérieures.

Les probabilités des événements futurs, d'après les événements observés, sont des *probabilités connexes* et non des probabilités indépendantes.

657. *Un événement s'est produit m fois en μ épreuves: quelle est la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, l'événement se produise m' fois?*

Si l'événement s'est produit m fois en μ épreuves, l'événement contraire s'est produit $\mu - m$ fois.

Supposons d'abord que l'événement considéré et l'événement contraire se produisent, dans les μ' nouvelles épreuves, dans un ordre déterminé; que, par exemple, aux m' premières épreuves, l'événement se produise et que l'événement contraire se produise aux $n' = \mu' - m'$ épreuves suivantes. La probabilité d'une telle éventualité est, d'après le raisonnement exposé au paragraphe précédent,

$$\frac{m}{\mu}\,\frac{m+1}{\mu+1}\,\frac{m+2}{\mu+2}\cdots\frac{m+m'-1}{\mu+m'-1}\,\frac{n}{\mu+m'}\,\frac{n+1}{\mu+m'+1}\cdots\frac{n+n'-1}{\mu+m'+n'-1}$$

ou

$$\frac{(\mu-1)!}{(m-1)!\,(n-1)!}\,\frac{(m+m'-1)!\,(n+n'-1)!}{(\mu+\mu'-1)!};$$

elle est indépendante de l'ordre considéré.

L'ordre étant indifférent, la probabilité demandée est égale, d'après le principe des probabilités totales, au produit de l'expression précédente par le nombre des permutations de μ' lettres dont m' sont semblables entre elles et $n' = \mu' - m'$ semblables entre elles.

La probabilité demandée est donc

$$\frac{(\mu-1)!}{(m-1)!\,(n-1)!}\,\frac{\mu'!}{m'!\,n'!}\,\frac{(m+m'-1)!\,(n+n'-1)!}{(\mu+\mu'-1)!}.$$

658. **Cas de grands nombres.** — Un événement s'est produit m fois en μ épreuves, soit $\frac{m}{\mu} = p$. Si, en μ' nouvelles épreuves, l'événement se produit $\mu' p + x$ fois, on dit que l'*écart apparent* est x.

Nous allons chercher la probabilité pour que l'écart apparent soit x en supposant que μ et μ' soient de grands nombres.

La probabilité pour que la valeur $\frac{m}{\mu} = p$ soit erronée de la quantité ε est (n° 652)

$$\frac{\sqrt{\mu}\,e^{-\frac{\mu\varepsilon^2}{2r(1-r)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2r(1-r)}}\,d\varepsilon.$$

Dans les μ' nouvelles épreuves l'événement dont la probabilité exacte (et inconnue) est r doit se produire $\mu' p + x$ fois ou

$\mu'(r+\varepsilon)+x$ fois; la probabilité d'une telle éventualité est

$$\frac{e^{-\frac{(\mu'\varepsilon+x)^2}{2\mu' r(1-r)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' r(1-r)}}\,dx.$$

La probabilité pour que la valeur p soit erronée de la quantité ε et pour que l'écart apparent soit x est, d'après le principe des probabilités composées,

$$\frac{\sqrt{\mu}\,e^{-\frac{\mu\varepsilon^2}{2r(1-r)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2r(1-r)}}\times\frac{e^{-\frac{(\mu'\varepsilon+x)^2}{2\mu' r(1-r)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' r(1-r)}}\,d\varepsilon\,dx.$$

La probabilité pour que l'écart apparent soit x s'obtient, d'après le principe de la probabilité totale, en intégrant cette expression par rapport à ε entre $-\infty$ et $+\infty$; cette probabilité est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu' r(1-r)\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' r(1-r)\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}\,dx.$$

On peut, finalement, remplacer r par p et $1-r$ par q; la formule s'écrit alors

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' pq\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}\,dx.$$

Telle est la probabilité pour que l'écart apparent soit x.

Si l'événement avait exactement pour probabilité p, la probabilité pour que, en μ' épreuves, il se produise $\mu' p+x$ fois serait

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' pq}}\,dx.$$

En comparant cette formule à la précédente, on voit que : *L'ignorance où l'on est des valeurs exactes des probabilités augmente les écarts dans le rapport de* $\sqrt{\mu+\mu'}$ *à* $\sqrt{\mu}$.

659. On peut obtenir la même formule en transformant en expression exponentielle l'expression factorielle du n° 657; il suffit de poser

$$m = \mu p, \qquad n = \mu q,$$
$$m' = \mu' p + x, \qquad n' = \mu' q - x$$

et de remarquer qu'on a, d'après le n° 643,

$$\frac{\mu'!}{(\mu' p + x)!\,(\mu' q - x)!} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' pq}\,p^{\mu' p + x}\,q^{\mu' q - x}}.$$

On obtient alors, pour la probabilité de l'écart apparent x,

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' pq}\sqrt{\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}\,dx.$$

660. **Cas où il y a plusieurs variables.** — Nous nous plaçons dans les conditions exposées au n° 654.

Nous supposons que μ épreuves aient été faites et que les n événements possibles se soient produits respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_n$ fois, ces quantités m étant de très grands nombres. On pose

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{m_n}{\mu} = p_n.$$

Si, en μ' nouvelles épreuves (μ' étant un très grand nombre du même ordre que μ), le premier événement se produit $\mu' p_1 + x_1$ fois, le deuxième événement $\mu' p_2 + x_2$ fois, ..., le $n^{\text{ième}}$ événement $\mu' p_n + x_n$ fois, on dit que les *écarts apparents* sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0)$.

Nous allons calculer la probabilité pour que les écarts apparents soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La probabilité pour que les valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ soient respectivement erronées de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ est (n° 654)

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1}\, e^{-\frac{\mu}{2}\left[\frac{\varepsilon_1^2}{r_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{r_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n^2}{r_n}\right]}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}},$$

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ désignant comme précédemment les probabilités exactes et inconnues des divers événements.

L'écart apparent étant x_1 pour le premier événement, cet événement s'est produit $\mu' p_1 + x_1$ fois en μ' épreuves ou $\mu'(r_1 + \varepsilon_1) + x_1$ fois ou

$$\mu' r_1 + (\mu' \varepsilon_1 + x_1)$$

fois, et, comme cet événement a pour probabilité réelle r_1, l'écart réel est $\mu' \varepsilon_1 + x_1$.

L'écart réel pour le second événement qui a pour probabilité réelle r_2 est de même $\mu' \varepsilon_2 + x_2$, etc.

La probabilité de tels écarts est (nº 645)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'}\left[\frac{(\mu'\varepsilon_1 + x_1)^2}{r_1} + \frac{(\mu'\varepsilon_2 + x_2)^2}{r_2} + \ldots + \frac{(\mu'\varepsilon_n + x_n)^2}{r_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi\mu'})^{n-1}\sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}}.$$

En multipliant cette quantité par la probabilité des erreurs ε et en intégrant le produit pour toutes les valeurs de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ entre $-\infty$ et $+\infty$, on obtient la probabilité pour que les écarts apparents soient $x_1, \ldots, x_n$; cette probabilité est donc

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1}}{(\sqrt{2\pi\mu'})^{n-1}(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}\sqrt{r_1 r_2 \ldots r_n}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\left[\frac{\frac{\mu+\mu'}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{2\varepsilon_1 x_1}{2} + \frac{x_1^2}{2\mu'}}{r_1}\right] + \left[\frac{\frac{\mu+\mu'}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{2\varepsilon_2 x_2}{2} + \frac{x_2^2}{2\mu'}}{r_2}\right] + \ldots + \left[\frac{\frac{\mu+\mu'}{2}\varepsilon_n^2 + \frac{2\varepsilon_n x_n}{2} + \frac{x_n^2}{2\mu'}}{r_n}\right]\right\}} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{n-1}.$$

Le premier crochet peut s'écrire

$$\frac{1}{r_1}\left\{\left[\frac{\mu+\mu'}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{2\varepsilon_1 x_1}{2} + \frac{x_1^2}{2(\mu+\mu')}\right] + \frac{x_1^2}{2\mu'} - \frac{x_1^2}{2(\mu+\mu')}\right\}$$

ou

$$\frac{1}{r_1}\left\{\frac{1}{2(\mu+\mu')}\left[(\mu+\mu')\varepsilon_1 + x_1\right]^2 + \frac{x_1^2}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right\}.$$

En appliquant la même transformation aux autres crochets, l'expres-

sion de la probabilité devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left[\frac{x_1^2}{r_1}+\frac{x_2^2}{r_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{r_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\left(\sqrt{\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{r_1 r_2\ldots r_n}}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sqrt{\mu+\mu'})^{n-1}e^{-\frac{1}{2(\mu+\mu')}\left\{\frac{[(\mu+\mu')\varepsilon_1+x_1]^2}{r_1}+\frac{[(\mu+\mu')\varepsilon_2+x_2]^2}{r_2}+\ldots+\frac{[(\mu+\mu')\varepsilon_n+x_n]^2}{r_n}\right\}}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{r_1 r_2\ldots r_n}}d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{n-1}.$$

Pour obtenir la valeur de l'intégrale, posons

$$(\mu+\mu')\varepsilon_1+x_1=\lambda_1,\qquad (\mu+\mu')\varepsilon_2+x_2=\lambda_2,\qquad \ldots;$$

elle devient

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2(\mu+\mu')}\left[\frac{\lambda_1^2}{r_1}+\frac{\lambda_2^2}{r_2}+\ldots+\frac{\lambda_n^2}{r_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}(\sqrt{\mu+\mu'})^{n-1}\sqrt{r_1 r_2\ldots r_n}}d\lambda_1\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}.$$

et, comme la somme des λ est nulle, cette intégrale a pour valeur un (n° 647).

La probabilité pour que les écarts apparents soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est donc

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left[\frac{x_1^2}{r_1}+\frac{x_2^2}{r_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{r_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\left(\sqrt{\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{r_1 r_2\ldots r_n}}.$$

661. Nous pouvons, comme précédemment, remplacer dans cette formule les probabilités exactes et inconnues $r_1, r_2, \ldots, r_n$ par les probabilités observées $p_1, p_2, \ldots, p_n$. La probabilité pour que les écarts apparents aient pour valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est donc

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\left(\sqrt{\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2\ldots p_n}}.$$

Si les probabilités avaient exactement pour valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$,

la probabilité des écarts $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en μ' épreuves, serait

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}(\sqrt{\mu'})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

La comparaison des deux formules montre que *l'ignorance où l'on est des valeurs exactes des probabilités augmente les écarts dans le rapport de* $\sqrt{\mu+\mu'}$ à $\sqrt{\mu}$.

662. *En* μ *épreuves, l'événement* A_1 *s'est produit* m_1 *fois, l'événement* A_2, m_2 *fois, …, l'événement* A_n, m_n *fois.* μ' *nouvelles épreuves devant avoir lieu, en désignant par* $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ *les nombres des arrivées des événements* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *quelle est la probabilité pour que*

$$\alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n$$

ait une valeur donnée s.

μ et μ' sont de très grands nombres; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des coefficients donnés qui peuvent désigner, par exemple, les pertes possibles d'un joueur à chaque épreuve; s désigne alors la perte totale dans l'ensemble des μ' nouvelles épreuves.

Posons comme précédemment

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{m_n}{\mu} = p_n.$$

Supposons que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aient pour probabilités $(p_1+\varepsilon_1), (p_2+\varepsilon_2), \ldots, (p_n+\varepsilon_n)$; la probabilité de cette éventualité est (n° 654)

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1} e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1+\varepsilon_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2+\varepsilon_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n+\varepsilon_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{(p_1+\varepsilon_1)(p_2+\varepsilon_2)\ldots(p_n+\varepsilon_n)}}.$$

Dans cette formule, $p_1+\varepsilon_1, p_2+\varepsilon_2, \ldots$ peuvent être remplacés par $p_1, p_2, \ldots$.

Ces valeurs $(p_1+\varepsilon_1), \ldots, (p_n+\varepsilon_n)$ donnent pour la probabilité de de la quantité s (n° 287)

$$\frac{e^{-\frac{\{s-\mu'[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+(p_2+\varepsilon_2)\alpha_2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]\}^2}{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2+(p_2+\varepsilon_2)\alpha_2^2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2]-[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+(p_2+\varepsilon_2)\alpha_2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2+(p_2+\varepsilon_2)\alpha_2^2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2]-[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+(p_2+\varepsilon_2)\alpha_2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}}.$$

On doit négliger les ε dans le dénominateur de cette expression et dans le dénominateur de l'exponentielle : il faut, au contraire, les conserver dans le numérateur de l'exponentielle, car ce numérateur peut s'écrire

$$\{[s - \mu'(p_1\alpha_1 + \ldots + p_n\alpha_n)] - [\mu'(\varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_n\alpha_n)]\}^2,$$

et l'on voit sous cette forme que, les termes entre crochets étant du même ordre (de l'ordre de $\sqrt{\mu'}$), aucune quantité ne peut être négligée.

La probabilité des valeurs $(p_1 + \varepsilon_1), \ldots, (p_n + \varepsilon_n)$ et s est, d'après le principe des probabilités composées, égale au produit des deux dernières expressions, et la probabilité cherchée est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sqrt{\pi})^{n-1}\, e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}$$

$$\times \frac{e^{-\frac{\{s-\mu'[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]\}^2}{2\mu'\{[p_1\alpha_1^2+p_2\alpha_2^2+\ldots+p_n\alpha_n^2]-[p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_n\alpha_n]^2\}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'\{[p_1\alpha_1^2+p_2\alpha_2^2+\ldots+p_n\alpha_n^2]-[p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_n\alpha_n]^2\}}}\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{n-1}.$$

On doit dans cette formule remplacer ε_n par $-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1})$.

Lorsqu'il n'y a qu'une variable ε, l'expression se réduit à

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu}\, e^{-\frac{\mu\varepsilon^2}{2p_1p_2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2p_1p_2}} \times \frac{e^{-\frac{\{s-\mu'[(p_1+\varepsilon)\alpha_1+(p_2-\varepsilon)\alpha_2]\}^2}{2\mu' p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}\, d\varepsilon;$$

elle s'intègre facilement et devient

$$\frac{e^{-\frac{[s-\mu'(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)]^2}{2\mu' p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}.$$

Dans le cas où le nombre des variables est quelconque, les intégrations sont pénibles ; il est à la fois plus simple et plus élégant de résoudre le problème en faisant appel à la théorie des probabilités connexes.

Posons

$$s = \mu' p_1\alpha_1 + \mu' p_2\alpha_2 + \ldots + \mu' p_n\alpha_n + x;$$

x est l'*écart*. Le problème considéré revient à chercher la probabilité de cet écart.

Supposons qu'un joueur II perde, à chaque partie, une somme égale à l'accroissement de l'écart à l'épreuve correspondante ; supposons que les μ' nouvelles épreuves soient effectuées et qu'elles aient donné m'_1, m'_2, ..., m'_n pour les nombres des arrivées des événements A_1, A_2, ..., A_n. L'écart x est alors connu, et il a pour valeur

$$x = \alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n - \mu'(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n).$$

Si une nouvelle épreuve a lieu, l'événement A_1 s'étant produit $m_1 + m'_1$ fois en $\mu + \mu'$ épreuves a probabilité $\frac{m_1 + m'_1}{\mu + \mu'}$ de se produire, et alors l'écart augmente de la quantité

$$\alpha_1 - (p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n).$$

Il y a de même probabilité $\frac{m_2 + m'_2}{\mu + \mu'}$ pour que l'écart augmente de

$$\alpha_2 - (p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n)$$

etc. L'espérance mathématique du joueur II pour une nouvelle épreuve est donc

$$-\sum \frac{m_1 + m'_1}{\mu + \mu'}\left[\alpha_1 - (p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n)\right]$$

ou

$$-\frac{\alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n - \mu'(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)}{\mu + \mu'} = -\frac{x}{\mu + \mu'}.$$

L'espérance mathématique du joueur II pour une nouvelle épreuve est égale au produit de sa perte actuelle par une fonction de μ'.

La fonction d'instabilité du jeu de II pour une nouvelle épreuve se calcule de même, et elle a pour expression, après suppression des quantités négligeables,

$$2\left\{[\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n] - [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n]^2\right\}.$$

L'espérance du joueur II étant égale au produit de sa perte actuelle par une fonction de μ' et la fonction d'instabilité de son jeu étant constante, il suffit d'appliquer la formule démontrée au n° 314.

La probabilité pour que le joueur B perde la somme x en μ' épreuves est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{F(\mu')}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{F(\mu')}}\,dx,$$

F étant l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial \mu'} - \frac{2F}{\mu+\mu'} = 2\left\{[\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n] - [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n]^2\right\},$$

d'où

$$F = 2\mu'\left\{[\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n] - [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n]^2\right\}\frac{\mu+\mu'}{\mu}.$$

La probabilité de l'écart x est donc

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu'\left\{[\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n] - [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n]^2\right\}\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'\left\{[\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n] - [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n]^2\right\}\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}\,dx.$$

Si les probabilités des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ avaient pour valeurs exactes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la probabilité de l'écart x serait

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu'\left\{[\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n] - [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n]^2\right\}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'\left\{[\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n] - [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n]^2\right\}}}\,dx.$$

L'ignorance où l'on est des valeurs exactes des probabilités augmente les écarts dans le rapport de $\sqrt{\mu+\mu'}$ à $\sqrt{\mu}$.

CHAPITRE XXIII.

PROBABILITÉS DES CAUSES.

663. Il est utile de faire comprendre le sens attribué au mot *cause* dans le calcul des probabilités.

Un joueur a joué cinq parties; à chaque partie il avait égale probabilité de gagner ou de perdre un franc; finalement il a gagné en totalité un franc. A la troisième partie il avait nécessairement perdu un franc ou gagné un ou trois francs; ces trois alternatives sont dites les causes du fait observé qui est le gain total de un franc.

Lorsqu'on ignorait l'issue du jeu, les causes avaient pour probabilité *a priori* $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{8}$. Lorsqu'on sait que le joueur a gagné finalement un franc, sans savoir quelle a été la suite de ses gains et de ses pertes, les probabilités des trois alternatives, c'est-à dire les probabilités des trois causes, se trouvent changées; on les nomme probabilités *a posteriori*.

664. Deux urnes A et B sont d'apparence identiques; la première renferme dix boules blanches et une boule noire, la seconde dix boules noires et une boule blanche; on désigne une des urnes au hasard; la probabilité de désigner l'urne A est $\frac{1}{2}$.

Supposons maintenant qu'avant de constater quelle urne on a désignée on extraie une boule de celle-ci. Si la boule est blanche, il est très probable que l'urne désignée est A, et la probabilité pour qu'on ait désigné l'urne A est plus grande que $\frac{1}{2}$.

Les deux alternatives possibles sont la désignation de l'une ou de l'autre urne; elles sont dites les causes du fait observé, qui est la sortie d'une boule blanche.

Lorsque la boule n'était pas encore extraite, les deux causes avaient pour probabilités *a priori* $\frac{1}{2}$. Lorsque la boule est extraite, ces probabilités, dites *a posteriori*, ne sont plus égales.

Nous allons maintenant établir la formule générale des probabilités des causes.

665. **Formule de Bayes.** — Diverses causes $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ont pu produire un événement observé. Les probabilités des causes, lorsque le résultat n'était pas encore connu (probabilités *a priori*), étaient ϖ_1, $\varpi_2, \ldots, \varpi_k$. L'événement se produit; la cause E_i, quand on est certain que c'est elle qui agit, donne à l'événement la probabilité Π_i. Quelle est la probabilité pour que E_i soit la cause de l'événement (probabilité *a posteriori*)?

Soit x la probabilité cherchée; nous écrirons de deux manières différentes la probabilité pour que le fait se produise et qu'il soit dû à la cause considérée.

1° Il faut d'abord que la cause soit mise en jeu (probabilité ϖ_i) et qu'elle produise l'événement (probabilité Π_i).

2° Il faut que l'événement se produise (probabilité

$$\varpi_1 \Pi_1 + \varpi_2 \Pi_2 + \ldots + \varpi_k \Pi_k)$$

et que, s'étant produit, il soit dû à la cause désignée (probabilité x). On a donc

$$\varpi_i \Pi_i = (\varpi_1 \Pi_1 + \varpi_2 \Pi_2 + \ldots + \varpi_k \Pi_k) x,$$

d'où

$$x = \frac{\varpi_i \Pi_i}{\varpi_1 \Pi_1 + \varpi_2 \Pi_2 + \ldots + \varpi_k \Pi_k}.$$

Telle est l'expression de la probabilité a posteriori.

666. Une urne contient a boules; les unes sont blanches, les autres noires; on ignore en quelle proportion. On tire μ boules en remettant chaque fois la boule sortie. Il ne sort que des boules blanches. Quelle est la probabilité pour que l'urne renferme k boules blanches?

Soit ϖ_n la probabilité *a priori* pour qu'il y ait n blanches.

S'il y a n blanches, la probabilité pour en extraire μ de suite est

$$U_n = \left(\frac{n}{a}\right)^{\mu}.$$

D'après la formule de Bayes, la probabilité *a posteriori* pour qu'il y ait k boules blanches est

$$\frac{\varpi_k \left(\frac{k}{a}\right)^{\mu}}{\varpi_1 \left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} + \varpi_2 \left(\frac{2}{a}\right)^{\mu} + \ldots + \varpi_a \left(\frac{a}{a}\right)^{\mu}} = \frac{\varpi_k k^{\mu}}{\varpi_1 1^{\mu} + \varpi_2 2^{\mu} + \ldots + \varpi_a a^{\mu}}.$$

Il faut connaître *a priori* $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_a$ sur lesquels on peut faire plusieurs hypothèses.

Supposons par exemple que toutes les compositions de l'urne soient *a priori* également vraisemblables; alors tous les ϖ sont égaux, et la formule se réduit à

$$\frac{k^{\mu}}{1^{\mu} + 2^{\mu} + \ldots + a^{\mu}}.$$

Si par exemple $a = 4$, $k = 3$, $\mu = 2$, la probabilité *a posteriori* est 0,3.

Supposons encore que l'urne soit remplie en tirant au hasard les couleurs blanche et noire avec égale probabilité pour chacune. La probabilité *a priori* pour que l'urne contienne n boules blanches est

$$\varpi_n = \frac{a!}{n!(a-n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{a}.$$

Pour obtenir les probabilités *a posteriori*, il suffit de remplacer dans la formule générale les quantités ϖ par cette valeur. Si, par exemple, $a = 4$, $k = 3$, $\mu = 2$, la probabilité *a posteriori* est 0,45.

667. **Probabilités des causes dans les épreuves répétées.** — *Un événement s'est produit m fois en μ épreuves (identiques); quelle est la probabilité pour que ce fait ait pour cause une valeur y de la probabilité de l'événement?*

Soit $\varpi(y)\,dy$ la probabilité *a priori* (supposée connue) pour que la probabilité de l'événement ait pour valeur y.

Si la cause qui produit l'effet observé, c'est-à-dire l'arrivée des m événements, est la valeur y, elle donne à l'arrivée de ces m événements la probabilité

$$\frac{\mu!}{m!\,n!}\,y^m(1-y)^n,$$

en posant $m+n=\mu$.

La probabilité pour que le fait considéré ait pour cause une probabilité de l'événement comprise entre y et $y+dy$ est, d'après le théorème de Bayes,

$$\frac{y^m(1-y)^n\,\varpi(y)\,dy}{\int y^m(1-y)^n\,\varpi(y)\,dy}.$$

Les limites de l'intégration sont nécessairement comprises entre zéro et un.

La dernière formule exprime la probabilité *a posteriori* pour que l'événement considéré ait pour probabilité y.

668. Expression finale de la probabilité. — Si le nombre μ des épreuves était infini, l'événement considéré et l'événement contraire se produiraient proportionnellement à leur probabilité, de sorte que la fraction $\frac{m}{\mu}$ exprimerait exactement la probabilité de l'événement considéré.

Cette valeur correspond nécessairement à la plus grande probabilité *a posteriori*. Cette plus grande probabilité s'obtient en annulant la dérivée par rapport à y du numérateur de l'expression générale du paragraphe précédent, c'est-à-dire en posant

$$[y^{m-1}(1-y)^{n-1}]\left[m(1-y)\varpi(y)-ny\varpi(y)+y(1-y)\frac{d\varpi}{dy}\right]=0.$$

Si m et n sont infiniment grands, la formule devient

$$y=\frac{m}{m+n}.$$

669. Étude d'un cas particulier. — Lorsque le nombre μ des épreuves n'est pas très grand, à chaque hypothèse faite sur la fonction ϖ correspond une valeur différente pour la probabilité *a posteriori*.

Si l'on n'a aucune idée *a priori* sur les probabilités, l'hypothèse la plus simple consiste à poser $\varpi = 1$, ce qui revient à considérer comme également vraisemblables toutes les valeurs de la probabilité entre zéro et un.

Alors le dénominateur de la probabilité *a posteriori* (nº 667) est l'intégrale eulérienne

$$\int_0^1 y^m (1-y)^n \, dy = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}.$$

La probabilité cherchée a donc pour valeur

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\, n!} y^m (1-y)^n \, dy.$$

670. La valeur la plus probable de y est $\frac{m}{m+n}$.

La valeur moyenne de y est

$$\int_0^1 \frac{(m+n+1)!}{m!\, n!} y^{m+1} (1-y)^n \, dy = \frac{m+1}{m+n+2}.$$

671. **Expression pénultième de la probabilité.** — Lorsque le nombre des épreuves est très grand, les probabilités *a posteriori* sont, comme nous l'avons vu (nº 652), indépendantes de toute hypothèse sur les probabilités *a priori*.

La formule relative à ce cas, obtenue indépendamment de la théorie des probabilités des causes, peut être également démontrée en faisant appel à cette théorie en supposant que le nombre des épreuves soit très grand.

L'événement s'étant produit m fois en μ épreuves, sa probabilité est voisine, lorsque μ est très grand, de $\frac{m}{\mu} = p$; désignons cette probabilité par $p + \varepsilon$.

Si l'on développe $\varpi(y) = \varpi(p+\varepsilon)$ par la formule de Taylor, cette fonction se réduit, puisque ε est infiniment petit, à sa partie constante, de sorte que la probabilité *a posteriori* est la même que si l'on avait supposé *a priori* ϖ égal à un.

La probabilité *a posteriori* d'une valeur y est donc

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}\,y^m(1-y)^n\,dy.$$

En remplaçant y par $p+\varepsilon$, on obtient la probabilité d'une valeur ε :

$$\left[\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}p^m q^n\right]\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{p}\right)^m\left(1-\frac{\varepsilon}{q}\right)^n\right]d\varepsilon.$$

Le premier crochet a pour valeur asymptotique

$$\frac{m+n+1}{\sqrt{2\pi(m+n)pq}}.$$

Désignant par u le second crochet, on a

$$\begin{aligned}\log u &= m\log\left(1+\frac{\varepsilon}{p}\right)+n\log\left(1-\frac{\varepsilon}{q}\right)\\ &= m\left(\frac{\varepsilon}{p}-\frac{\varepsilon^2}{2p^2}+\frac{\varepsilon^3}{3p^3}-\ldots\right)+n\left(-\frac{\varepsilon}{q}-\frac{\varepsilon^2}{2q^2}-\frac{\varepsilon^3}{3q^3}-\ldots\right)\\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{m}{p^2}+\frac{n}{q^2}\right);\end{aligned}$$

en négligeant les termes en ε^3, on a donc

$$u = e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{m}{p^2}+\frac{n}{q^2}\right)},$$

et l'expression de la probabilité devient, en remplaçant m par μp et n par μq,

$$\frac{\sqrt{\mu}\,e^{-\frac{\mu\varepsilon^2}{2pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2pq}}\,d\varepsilon.$$

Nous retrouvons la même formule que précédemment.

672. **Étude du cas général.** — Supposons maintenant que $\varpi(y)$ soit quelconque, mais développable en série entière

$$\varpi(y) = a + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots$$

et que les valeurs de y s'étendent depuis zéro jusqu'à un ; alors le

dénominateur de l'expression générale de la probabilité *a posteriori* (n° 667),

$$\int_0^1 y^m(1-y)^n \varpi(y)\,dy,$$

se compose d'une série d'intégrales eulériennes.

Si l'on désigne par S la somme de cette série, la probabilité *a posteriori* est

$$\frac{1}{S} y^m(1-y)^n \varpi(y)\,dy.$$

673. Soit, par exemple,

$$\varpi(y) = (\alpha+1)y^{\alpha}.$$

La probabilité de la valeur y est

$$\frac{y^m(1-y)^n \varpi(y)\,dy}{\int_0^1 y^m(1-y)^n \varpi(y)\,dy} = \frac{y^{m+\alpha}(1-y)^n\,dy}{\int_0^1 y^{m+\alpha}(1-y)^n\,dy}$$
$$= \frac{(m+n+\alpha+1)!\,y^{m+\alpha}(1-y)^n\,dy}{(m+\alpha)!\,n!}.$$

La valeur la plus probable de y est

$$\frac{m+\alpha}{m+n+\alpha}.$$

La valeur moyenne est

$$\frac{m+\alpha+1}{m+n+\alpha+2}.$$

Ces valeurs sont très voisines de $\frac{m}{m+n}$ dès que α est petit auprès de m et de n.

674. **Cas où il y a plusieurs variables.** — *A chaque épreuve (toutes les épreuves étant identiques), n événements peuvent se produire et il s'en produit nécessairement un et un seul.*

En μ épreuves, le premier événement s'est produit m_1 fois; le second, m_2 fois; ...; le $n^{\text{ième}}$, m_n fois $(m_1+m_2+\ldots+m_n=\mu)$. Quelle est la probabilité pour que ce fait ait pour cause les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des probabilités des événements?

(On doit nécessairement avoir $y_1+y_2+\ldots+y_n=1$.)

En d'autres termes, quelle est la probabilité *a posteriori* pour que les événements considérés aient respectivement pour probabilités $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Soit $\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}$ la probabilité *a priori* (supposée connue) pour que les probabilités des événements soient $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, c'est-à-dire pour que la probabilité du premier soit comprise entre y_1 et $y_1 + dy_1$, celle du second entre y_2 et $y_2 + dy_2$, ...

Si le fait observé a eu pour cause les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, celles-ci donnent à l'événement observé la probabilité (n° 664)

$$\frac{\mu!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n},$$

et la probabilité demandée est, d'après le théorème de Bayes,

$$\frac{y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n}\,\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}{\int\int\ldots\int y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n}\,\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}.$$

L'intégration s'étend à toutes les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ telles que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0,$$

si l'on suppose que la fonction ϖ s'étend à ce même système de valeurs.

675. Expression finale des probabilités. — Si le nombre μ des épreuves était infini, les événements se produiraient proportionnellement à leur probabilité, et il n'y aurait à considérer que le seul système de valeurs

$$y_1 = \frac{m_1}{\mu}, \quad y_2 = \frac{m_2}{\mu}, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = \frac{m_{n-1}}{\mu}, \quad y_n = \frac{m_n}{\mu}.$$

Ces valeurs correspondent nécessairement à la plus grande probabilité *a posteriori*. Cette plus grande probabilité s'obtient en annulant les dérivées par rapport aux diverses variables du numérateur de l'expression générale du paragraphe précédent. Or, la dérivée par rap-

port à y_1 peut s'écrire

$$y_1^{m_1-1} y_2^{m_2} \dots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1})^{m_n-1}$$
$$\times \left\{ [m_1(1 - y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1}) - y_1 m_n]\varpi + y_1(1 - y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1}) \frac{\partial\varpi}{\partial y_1} \right\};$$

si on l'égale à zéro en négligeant les termes qui ne contiennent pas en facteur les quantités $m_1, \dots, m_n$, on obtient

$$m_1(1 - y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1}) - y_1 m_n = 0$$

et $n-2$ équations analogues. La solution de ce système est nécessairement

$$y_1 = \frac{m_1}{\mu}, \qquad y_2 = \frac{m_2}{\mu}, \qquad \dots, \qquad y_n = \frac{m_n}{\mu}.$$

676. **Étude d'un cas particulier.** — Si μ n'est pas très grand, à chaque hypothèse faite sur la fonction ϖ correspond une valeur différente pour la probabilité *a posteriori*.

Si l'on n'a aucune idée *a priori* sur les probabilités, l'hypothèse la plus simple consiste à poser $\varpi = 1$. Alors le dénominateur de la probabilité *a posteriori* (n° 674) est l'intégrale

$$\int\int\cdots\int y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1})^{m_n} \, dy_1 \, dy_2 \dots dy_{n-1},$$

qui est étendue à tous les systèmes de valeurs de $y_1, \dots, y_{n-1}$ tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} > 0.$$

Cette intégrale est du type de celles qui ont été déterminées par Dirichlet ; sa valeur est

$$\frac{\Gamma(m_1+1)\,\Gamma(m_2+1)\dots\Gamma(m_{n-1}+1)\,\Gamma(m_n+1)}{\Gamma(m_1+m_2+\dots+m_n+n)}$$

ou

$$\frac{m_1!\, m_2! \dots m_n!}{(m_1+m_2+\dots+m_n+n-1)!}.$$

La probabilité cherchée a donc pour valeur

$$\frac{(m_1+m_2+\dots+m_n+n-1)!}{m_1!\, m_2! \dots m_n!}$$
$$\times\, y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1})^{m_n} \, dy_1 \, dy_2 \dots dy_{n-1}.$$

677. **Expression pénultième de la probabilité.** — Lorsque le nombre des épreuves est très grand, les probabilités *a posteriori* sont, comme nous l'avons vu (n° 654), indépendantes de toute hypothèse sur les probabilités *a priori*.

La formule relative à ce cas, obtenue indépendamment de la théorie des probabilités des causes, peut être également démontrée en faisant appel à cette théorie, en supposant que le nombre des épreuves soit très grand.

Comme dans le cas d'une seule variable (n° 671), on verrait que supposer un grand nombre d'épreuves revient à admettre que $\varpi = 1$. En transformant ensuite la formule du paragraphe précédent par le même procédé que dans le cas d'une variable, on serait conduit à la formule du n° 655.

678. **Étude du cas général.** — Supposons maintenant que $\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ soit quelconque, mais développable en série entière

$$\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = a_0 + a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots \\ + a_{1,n-1}y_{n-1} + a_{2,1}y_1^2 + a_{2,2}y_2^2 + \ldots + b_{1,2}y_1y_2 + \ldots$$

et que la fonction ϖ s'étende à tous les systèmes de valeurs de y_1, $y_2, \ldots, y_{n-1}$ tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0;$$

le dénominateur de l'expression générale de la probabilité *a posteriori* (n° 674)

$$\iint \cdots \int y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \\ \times \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}$$

se composera alors d'une somme d'intégrales de Dirichlet et pourra ainsi être obtenu sous forme d'un développement en série; en désignant par S cette série, l'expression de la probabilité sera

$$\frac{1}{S} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_{n-1}.$$

679. **Probabilité des événements futurs d'après les événements observés.** — *Un événement s'est produit m fois en μ épreuves;*

quelle est la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, il se produise suivant une loi donnée ?

Toutes les épreuves passées ou futures sont supposées identiques.

Soit $\lambda(y)$ la probabilité *a posteriori* pour que l'événement considéré ait pour probabilité y.

Soit $\psi(y, \mu')$ la probabilité pour que l'événement se produise suivant la loi donnée en μ' nouvelles épreuves quand la probabilité de l'événement est y.

La probabilité pour qu'on obtienne la valeur y et pour que l'événement se produise suivant la loi donnée est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\lambda(y) \times \psi(y, \mu')\, dy.$$

D'après le principe de la probabilité totale, la probabilité cherchée est la somme des quantités analogues pour les valeurs de y qui satisfont à la loi donnée ; cette probabilité est exprimée par l'intégrale

$$\int \lambda(y)\, \psi(y, \mu')\, dy,$$

si l'on suppose que λ est une fonction continue.

On peut aussi écrire, en remplaçant λ par sa valeur (n° 667),

$$\frac{\int y^m (1-y)^n \varpi(y)\, \psi(y, \mu')\, dy}{\int y^m (1-y)^n \varpi(y)\, dy}.$$

L'intégrale du numérateur est relative aux valeurs de y que rendent possibles la forme de la fonction ϖ et la loi exprimée par la fonction ψ.

L'intégrale du dénominateur s'étend aux valeurs de y que rend possibles la forme de la fonction ϖ ; on peut toujours lui donner pour limites zéro et un, mais en changeant la forme analytique de l'élément.

Lorsque $\varpi = 1$, l'expression de la probabilité se réduit à

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\, n!} \int y^m (1-y)^n \psi(y, \mu')\, dy.$$

680. *Un événement s'est produit m fois en μ épreuves; quelle est la probabilité pour qu'il se produise m' fois en μ' nouvelles épreuves ?*

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où $\varpi = 1$. On a, dans le cas considéré,

$$\psi(y, \mu') = \frac{(m'+n')!}{m'!\,n'!} y^{m'}(1-y)^{n'},$$

en posant $\mu' = m' + n'$.

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}\,\frac{(m'+n')!}{m'!\,n'!}\int_0^1 y^{m+m'}(1-y)^{n+n'}\,dy$$

ou

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}\,\frac{(m'+n')!}{m'!\,n'!}\,\frac{(m+m')!\,(n+n')!}{(m+m'+n+n'+1)!}.$$

La probabilité pour que l'événement se produise si l'on fait une seule épreuve est $\frac{m+1}{\mu+2}$; elle est très voisine de $\frac{m}{\mu}$ quand m et n sont de grands nombres.

681. *Un evénement s'est produit m fois en μ épreuves; quelle est la valeur moyenne du nombre des arrivées de l'événement en μ' nouvelles épreuves ?*

Si la probabilité *a posteriori* de l'événement a pour valeur y, la valeur moyenne est $\mu' y$. La valeur moyenne cherchée est donc, d'après les principes des probabilités composées et totales,

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}\int_0^1 y^m(1-y)^n \mu' y\,dy = \frac{\mu'(m+1)}{m+n+2} = \frac{\mu'(m+1)}{\mu+2}.$$

Lorsque μ est un grand nombre, la valeur moyenne est très voisine de $\mu'\frac{m}{\mu}$.

La valeur la plus probable du nombre des arrivées de l'événement en μ' nouvelles épreuves est également $\mu'\frac{m}{\mu}$ quand μ est un grand nombre. On le démontre en cherchant la plus grande valeur que peut obtenir l'expression finale du n° 680.

682. *L'événement A s'est produit m fois en μ épreuves et l'événement contraire B, $n = \mu - m$ fois. Quelle est la probabilité pour que, si l'on fait de nouvelles épreuves, l'événement A se produise k fois avant que l'événement B se produise h fois ?*

La question dont il s'agit n'est autre que le *problème des partis* dans le cas où les probabilités ne sont pas exactement connues.

Cherchons la probabilité pour que le fait dont il s'agit se produise en μ' épreuves exactement.

Si le fait se réalise en μ' épreuves exactement, c'est que, dans les $\mu' - 1$ premières épreuves, l'événement s'est produit $k - 1$ fois et que de plus il s'est produit à la $\mu'^{\text{ième}}$ épreuve.

La probabilité pour que, dans les $\mu' - 1$ premières épreuves, l'événement A se produise $k - 1$ fois et l'événement B, $\mu' - k$ fois, est (n° 680)

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}\,\frac{(\mu'-1)!}{(k-1)!\,(\mu'-k)!}\,\frac{(m+k-1)!\,(n+\mu'-k)!}{(m+n+\mu')!}.$$

L'événement A doit ensuite se produire à la $\mu'^{\text{ième}}$ épreuve s'étant produit $m + k - 1$ fois en $m + n + \mu' - 1$ épreuves. La probabilité de cette éventualité est

$$\frac{m+k}{m+n+\mu'+1}.$$

La probabilité pour que le fait considéré se produise exactement à la $\mu'^{\text{ième}}$ nouvelle épreuve est égale au produit des deux probabilités précédentes; elle a donc pour valeur

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}\,\frac{(\mu'-1)!}{(k-1)!\,(\mu'-k)!}\,\frac{(m+k)!\,(n+\mu'-k)!}{(m+n+\mu'+1)!}.$$

La probabilité pour que l'événement A se produise k fois avant que l'événement B se produise h fois s'obtient en sommant les quantités analogues pour toutes les valeurs entières de μ' depuis k jusqu'à $k + h - 1$.

683. *Un événement s'est produit m fois en $\mu = m + n$ épreuves ; quelle est la valeur moyenne du nombre des nouvelles épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement se produise k fois de suite ?*

La question dont il s'agit n'est autre que le *problème des réussites successives* dans le cas où les probabilités ne sont pas exactement connues.

La probabilité pour que l'événement considéré ait, *a posteriori*, pour probabilité y est, d'après la formule du n° 669,

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}\,y^m(1-y)^n\,dy.$$

Si la probabilité est y, la valeur moyenne est (n° 122)

$$\frac{1-y^k}{(1-y)y^k}.$$

La valeur moyenne cherchée est donc, d'après les principes des probabilités composées et totales,

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}\int_0^1 y^m(1-y)^n\,\frac{1-y^k}{(1-y)y^k}\,dy.$$

Si m est inférieur à k, la valeur moyenne est infinie. Si m est égal ou supérieur à k, l'intégrale est la différence de deux intégrales eulériennes ; la valeur moyenne est alors

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n}\left[\frac{(m-k)!}{(m+n-k)!}-\frac{m!}{(m+n)!}\right].$$

684. **Cas où il s'agit de grands nombres.** — Reprenons le problème général étudié précédemment (n° 680) et supposons que m, n, m', n' soient de grands nombres ; posons

$$\frac{m}{\mu}=p,\qquad \frac{n}{\mu}=q,$$

d'où

$$m=\mu p,\qquad n=\mu q.$$

La valeur moyenne et la valeur la plus probable de m' sont $\mu' p$.

Posons donc

$$m'=\mu' p+x,\qquad n'=\mu' q-x.$$

x est l'*écart apparent*.

Remplaçons, dans la formule finale du n° 680, les quantités m, n,

m', n' par leur valeur en fonction de μ, μ', p, q, x, et transformons l'expression factorielle en exponentielle; cette formule devient alors

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq \frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu' pq}\sqrt{\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}\,dx.$$

Telle est la probabilité de l'écart x.

Nous nous sommes placés dans l'hypothèse où $\varpi = 1$, mais, le nombre μ étant très grand, le résultat est indépendant de cette hypothèse, il exprime une loi pénultienne.

Nous l'avons d'ailleurs obtenu précédemment (n° 658) sans avoir recours à la théorie des probabilités des causes.

685. **Cas d'une loi initiale quelconque.** — Si le nombre μ n'est pas très grand et si la fonction ϖ est quelconque, la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, l'événement se produise m' fois quand il s'est produit m fois en μ épreuves est (n° 679)

$$\frac{\dfrac{(m'+n')!}{m'!\,n'!}\displaystyle\int_0^1 y^{m+m'}(1-y)^{n+n'}\varpi(y)\,dy}{\displaystyle\int_0^1 y^m(1-y)^n\varpi(y)\,dy},$$

si l'on suppose que la fonction ϖ s'étend à toutes les valeurs de y de zéro à un.

Si de plus ϖ est développable en série entière, chacune des intégrales est décomposable en une suite d'intégrales eulériennes et la probabilité est alors exprimée par le quotient de deux séries.

686. **Importance des formules pénultièmes.** — Les résultats les plus importants de la théorie que nous venons d'exposer sont exprimés par des lois finales et pénultièmes ; il est donc utile de connaître les conditions *a priori* que supposent ces lois.

Soit $\varpi(y)$ la probabilité *a priori* pour qu'un certain événement ait pour probabilité y.

La quantité $\varpi(y)$ doit nécessairement être positive et telle que la somme de ses valeurs pour toutes les valeurs possibles de y soit un.

Si $\varpi(y)$ est une fonction continue ne s'annulant pas et ne devenant pas infinie entre zéro et un, les formules finales et pénultièmes sont légitimes, pourvu que toutes les alternatives possibles se soient produites un grand nombre de fois.

Les formules pénultièmes sont donc applicables quand la loi des probabilités *a priori* est quelconque; mais en quelque sorte naturelle, et il faut, pour les mettre en défaut, former de toutes pièces des lois particulières qui ne présentent aucun intérêt au point de vue du calcul des probabilités.

Si l'on ne connaît rien sur la probabilité *a priori* d'un événement, la fonction $\varpi(y)$ peut être quelconque: mais elle ne peut pour aucune valeur de y devenir négative et zéro est son minimum absolu; la supposer nulle pour un intervalle fini de y est se placer dans un cas infiniment particulier; c'est précisément ce cas qui mettrait en défaut les formules finales si celles-ci conduisaient à une valeur de y qui devrait être nulle *a priori*.

L'emploi des formules finales et pénultièmes est donc légitime.

687. Il n'est peut-être pas inutile de donner un exemple qui montre la décroissance de l'influence des hypothèses initiales lorsque le nombre des épreuves augmente.

Supposons qu'on ait fait $2m$ épreuves et que l'événement se soit produit m fois.

Dans l'hypothèse où $\varpi = 1$, la probabilité pour que l'événement se produise à l'épreuve suivante est $\frac{1}{2}$.

Considérons une autre hypothèse et posons par exemple $\varpi(y) = 11y^{10}$.

Lorsqu'on supposait que ϖ avait pour valeur un, la probabilité de l'événement avait *a priori* autant de chances d'être supérieure à $\frac{1}{2}$ que d'être inférieure à $\frac{1}{2}$.

Dans l'hypothèse où $\varpi(y) = 11y^{10}$, il n'y a, *a priori*, qu'une chance sur deux mille pour que la probabilité de l'événement soit inférieure à $\frac{1}{2}$.

Le second cas, pour être très différent du premier, conduit cependant à des chiffres très voisins si m est un grand nombre.

La formule ci-dessus (nº 685) permet de calculer sans difficulté la probabilité pour que l'événement se produise à l'épreuve suivante, dans l'hypothèse où $\varpi(y) = 11y^{10}$; cette probabilité est $\frac{m+11}{2m+12}$.

Lorsque $m = 100$, elle a pour valeur 0,523; lorsque $m = 10000$, elle a pour valeur 0,5002; elle est donc très proche de la valeur asymptote 0,5000 obtenue dans l'hypothèse où $\varpi = 1$.

688. Les lois finales et pénultièmes ne sont vraies que si *tous* les cas possibles se sont produits un grand nombre de fois. Sur 3000 épreuves un événement ne s'est jamais produit; quelle est la probabilité pour qu'il se produise à l'épreuve suivante ?

Nous n'en savons rien; nous pouvons affirmer que cette probabilité est petite; mais il ne nous est pas possible de donner un chiffre sans faire une hypothèse sur les probabilités *a priori*. Suivant que nous adopterons telle ou telle hypothèse, le résultat sera absolument différent.

Sur 3000 épreuves un événement s'est produit 1000 fois: quelle est la probabilité pour qu'il se produise à l'épreuve suivante ?

Cette probabilité est nécessairement très voisine de $\frac{1}{3}$.

La différence capitale qui existe entre ces deux derniers problèmes semble indiquée par le bon sens.

689. Le bon sens est par contre insuffisant pour apprécier les probabilités lorsque tous les cas possibles ne se sont pas produits un grand nombre de fois; nous allons le prouver par un exemple.

L'événement A s'est produit deux fois en cinq épreuves et l'événement contraire B, trois fois. Si l'on fait une nouvelle épreuve, la probabilité pour que l'événement A se produise (nº 680) est $\frac{3}{7}$; elle est plus petite que $\frac{1}{2}$. La probabilité pour que l'événement A se produise quatre fois si l'on fait quatre nouvelles épreuves est $\frac{1}{14}$.

Si l'événement A avait pour probabilité $\frac{1}{2}$, la probabilité pour qu'il

se produise quatre fois de suite serait $\frac{1}{16}$, elle serait donc plus petite que $\frac{1}{14}$. Ce résultat semble paradoxal.

Dans le premier cas, le fait observé n'exclut pas d'une façon absolue l'hypothèse où l'événement A serait plus probable que l'événement B. Dans le second cas, au contraire, cette hypothèse est exclue par définition ; c'est ce qui explique le paradoxe.

Pour bien saisir la différence qui existe entre les deux cas, analysons la méthode qui conduit, pour la valeur de la probabilité, à la fraction $\frac{1}{14}$.

La probabilité pour que l'événement A se produise quatre fois de suite est, d'après le principe des probabilités composées, égale au produit de la probabilité pour qu'il se produise à la première épreuve multipliée par la probabilité pour qu'il se produise à la seconde épreuve quand on sait qu'il s'est produit à la première, multipliée par la probabilité pour qu'il se produise à la troisième épreuve quand on sait qu'il s'est produit aux deux précédentes, multipliée enfin par la probabilité pour qu'il se produise à la quatrième épreuve quand on sait qu'il s'est produit aux trois autres.

Dans le premier cas, la probabilité est donc égale au produit

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{8} \times \frac{5}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{14}.$$

La seconde fraction, $\frac{4}{8}$, exprime la probabilité pour que l'événement A se produise à l'épreuve suivante quand on sait qu'il s'est produit trois fois en six épreuves; $\frac{5}{9}$ est la probabilité pour que l'événement A se produise à l'épreuve suivante quand on sait qu'il s'est produit quatre fois en sept épreuves; $\frac{6}{10}$ est la probabilité pour que l'événement se produise quand on sait qu'il s'est produit cinq fois en huit épreuves.

Parmi les quatre fractions, la première est inférieure à $\frac{1}{2}$, mais les deux dernières sont supérieures à $\frac{1}{2}$. C'est ainsi que, dans l'ensemble, les conditions du problème supposent à l'événement A une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$.

690. **Cas où il y a plusieurs variables.** — *En μ épreuves, l'événement A_1 s'est produit m_1 fois ; l'événement A_2, m_2 fois ; ... ; l'événement A_n, m_n fois. Quelle est la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, les événements se produisent suivant une loi donnée ?*

On suppose que les événements s'excluent, que l'un quelconque d'entre eux se produit nécessairement à chaque épreuve et que toutes les épreuves passées ou futures sont identiques.

Soit $\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ la probabilité *a posteriori* pour que les événements considérés aient pour probabilités respectives $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Soit $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')$ la probabilité pour que, en μ' épreuves, les événements se produisent suivant la loi donnée quand les probabilités de ces événements sont $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

La probabilité pour qu'on obtienne les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ et pour que les événements se produisent suivant la loi donnée est, d'après le principe des probabilités composées,

$$\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}.$$

D'après le principe des probabilités totales, la probabilité cherchée est la somme des quantités analogues pour l'ensemble des valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ qui satisfont à la loi donnée; cette probabilité est donc exprimée par la formule

$$\int\int\cdots\int\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1},$$

qu'on peut aussi écrire en remplaçant λ par sa valeur (n° 674)

$$\frac{\int\int\cdots\int y_1^{m_1} y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\varpi\psi\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}{\int\int\cdots\int y_1^{m_1} y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\varpi\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}.$$

L'intégrale du numérateur est relative aux systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ que rendent possibles la forme de la fonction ϖ et la loi exprimée par la fonction ψ.

L'intégrale du dénominateur s'étend aux systèmes de valeurs que rend possibles la forme de la fonction ϖ.

Lorsque $\varpi = 1$, l'expression de la probabilité se réduit à

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\int\int\cdots\int y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}$$
$$\times\,\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}.$$

691. *En μ épreuves, l'événement A_1 s'est produit m_1 fois ; l'événement A_2, m_2 fois; ... ; l'événement A_n, m_n fois. Quelle est la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, l'événement A_1 se produise m'_1 fois ; l'événement A_2, m'_2 fois ; ... ; l'événement A_n, m'_n fois ?*

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où $\varpi = 1$. On a, dans le cas considéré,

$$\psi = \frac{(m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}\,y_1^{m'_1}y_2^{m'_2}\ldots y_{n-1}^{m'_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m'_n}.$$

La probabilité est donc

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\;\frac{(m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!},$$
$$\int\int\cdots\int y_1^{m_1+m'_1}y_2^{m_2+m'_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}+m'_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n+m'_n}dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1},$$

l'intégration s'étendant à toutes les valeurs telles que

$$1 > y_1+y_2+\ldots+y_{n-1} > 0.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\times\frac{(m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}$$
$$\times\,\frac{(m_1+m'_1)!\,(m_2+m'_2)!\ldots(m_n+m'_n)!}{(m_1+m'_1+m_2+m'_2+\ldots+m_n+m'_n+n-1)!}.$$

La probabilité pour que l'événement A_1 se produise si l'on fait une seule épreuve est $\frac{m_1+1}{\mu+n}$; elle est très voisine de $\frac{m_1}{\mu}$ lorsque μ est un grand nombre.

692. Supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_n, m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ soient de grands nombres; posons

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{m_n}{\mu} = p_n.$$

Posons encore

$$m'_1 = \mu' p_1 + x_1, \qquad m'_2 = \mu' p_2 + x_2, \qquad \ldots, \qquad m'_n = \mu' p_n + x_n;$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les *écarts apparents*.

Transformons l'expression factorielle en exponentielle; elle devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu' \frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Si les événements avaient pour probabilités exactes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ serait (n° 645)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

L'ignorance où l'on est des valeurs exactes des probabilités augmente donc les écarts dans le rapport de $\sqrt{\mu+\mu'}$ à $\sqrt{\mu}$.

Nous nous sommes placés dans l'hypothèse où $\varpi = 1$; mais, le nombre μ étant très grand, le résultat est indépendant de cette hypothèse.

Le théorème ci-dessus, l'un des plus importants du calcul des probabilités, exprime une loi pénultième; il est indépendant de toute hypothèse sur les valeurs initiales des probabilités.

Nous l'avons d'ailleurs démontré précédemment (n° 661) sans faire appel à la théorie des probabilités des causes.

693. Si μ n'est pas très grand et si la fonction ϖ est quelconque, la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, le premier événement se produise m'_1 fois, le second m'_2 fois, $\ldots$, est

$$\frac{(m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}$$

$$\times\frac{\int\int\cdots\int y_1^{m_1+m'_1} y_2^{m_2+m'_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}+m'_{n-1}}(1-y_1-\ldots-y_{n-1})^{m_n+m'_n}\,\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}{\int\int\cdots\int y_1^{m_1} y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\,\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}.$$

Les deux intégrales sont de la même forme : elles doivent s'étendre à tous les systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} > 0,$$

si la fonction ϖ s'étend, comme nous le supposerons, à tous ces systèmes de valeurs.

Si de plus ϖ est développable en série entière, chacune des intégrales est décomposable en une suite d'intégrales de Dirichlet et la probabilité est alors exprimée par le quotient de deux séries.

694. **Problèmes divers.** — *Une urne contient a boules de n couleurs différentes ; les unes sont blanches, les autres noires, rouges, ..., vertes, on ignore en quelle proportion. On tire $m_1 + m_2 + \dots + m_n = \mu$ boules de l'urne ; m_1 sont blanches, m_2 sont noires, ..., m_n sont vertes. Quelle est la probabilité pour que l'urne ait une composition donnée ?*

On suppose que les μ boules sont extraites simultanément ou successivement, les boules extraites n'étant pas replacées dans l'urne.

Soit $\varpi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ la probabilité *a priori* pour qu'il y ait dans l'urne y_1 boules blanches, y_2 boules noires, ..., y_n boules vertes $(y_1 + y_2 + \dots + y_n = a)$.

S'il y avait effectivement y_1 boules blanches, y_2 boules noires, ..., la probabilité pour que, en $m_1 + m_2 + \dots + m_n = \mu$ tirages, il sorte m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ... serait (n° 648)

$$\frac{\mu!}{m_1!\,m_2!\dots m_n!}\,\frac{y_1!}{(y_1-m_1)!}\,\frac{y_2!}{(y_2-m_2)!}\cdots\frac{y_n!}{(y_n-m_n)!}\,\frac{(a-\mu)!}{a!}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{\dfrac{y_1!\,y_2!\dots y_n!\,\varpi(y_1, y_2, \dots, y_n)}{(y_1-m_1)!\,(y_2-m_2)!\dots(y_n-m_n)!}}{\sum \dfrac{y_1!\,y_2!\dots y_n!\,\varpi(y_1, y_2, \dots, y_n)}{(y_1-m_1)!\,(y_2-m_2)!\dots(y_n-m_n)!}},$$

Le Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de $y_1, y_2, \dots, y_n$ telles que y_1 soit au moins égal à m_1, y_2 au moins égal à m_2, ..., et telles que $y_1 + y_2 + \dots + y_n = a$.

A chaque hypothèse faite sur la forme de la fonction ϖ correspond une valeur différente pour la probabilité cherchée.

Nous supposerons d'abord que toutes les compositions de l'urne sont *a priori* également probables; alors ϖ est constant et disparaît dans l'expression de la probabilité. Le Σ a pour valeur

$$\frac{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}{(\mu+n-1)!}\,\frac{(a+n-1)!}{(a-\mu)!},$$

et la probabilité cherchée est

$$\frac{y_1!\,y_2!\ldots y_n!\,(\mu+n-1)!\,(a-\mu)!}{(y_1-m_1)!\,(y_2-m_2)!\ldots(y_n-m_n)!\,m_1!\,m_2!\ldots m_n!\,(a+n-1)!}.$$

La plus grande probabilité correspond au cas où

$$y_1=\frac{m_1}{a},\qquad y_2=\frac{m_2}{a},\qquad \ldots.$$

695. *Si l'on effectue μ' nouveaux tirages, quelle est la probabilité pour obtenir m'_1 boules blanches, m'_2 boules noires, ... ?*

Si l'urne contenait y_1 boules blanches, y_2 boules noires, ..., après la sortie des μ boules elle contient y_1-m_1 boules blanches, y_2-m_2 boules noires, ... La probabilité pour que, en μ' tirages, il sorte m' boules blanches, m'_2 boules noires, ... serait alors (nº 648)

$$\frac{\mu'!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}\,\frac{(y_1-m_1)!}{(y_1-m_1-m'_1)!}$$
$$\times\frac{(y_2-m_2)!}{(y_2-m_2-m'_2)!}\cdots\frac{(y_n-m_n)!}{(y_n-m_n-m'_n)!}\,\frac{(a-\mu-\mu')!}{(a-\mu)!}.$$

Si l'on multiplie cette quantité par la probabilité *a posteriori* pour que les y aient respectivement pour valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et si l'on fait la somme de tous les résultats analogues, on obtient, d'après les principes des probabilités composées et totales, la probabilité cherchée; celle-ci a donc pour valeur

$$\frac{\mu'!\,(a-\mu-\mu')!\,(\mu+n-1))!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!\,m_1!\,m_2!\ldots m_n!\,(a+n-1)!}$$
$$\times\sum\frac{y_1!\,y_2!\ldots y_n!}{(y_1-m_1-m'_1)!\,(y_2-m_2-m'_2)!\ldots(y_n-m_n-m'_n)!}.$$

Le Σ s'étendant à tous les systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tels que

y_1 soit au moins égal à $m_1 + m'_1$, y_2 au moins égal à $m_2 + m'_2$, ..., et tels que $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = a$. Ce Σ a pour valeur

$$\frac{(m_1+m'_1)!\,(m_2+m'_2)!\ldots(m_n+m'_n)!}{(\mu+\mu'+n-1)!}\;\frac{(a+n-1)!}{(a-\mu-\mu')}.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\mu'!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}\;\frac{(\mu+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\;\frac{(m_1+m'_1)!\,(m_2+m'_2)!\ldots(m_n+m'_n)!}{(\mu+\mu'+n-1)!}.$$

Cette probabilité est indépendante de a; elle a même valeur que si a était infini. Si a était infini, la probabilité *a priori* d'extraire une boule de couleur donnée serait la même à chaque tirage et l'on serait ramené au problème du n° 691. La dernière formule que nous venons d'obtenir est d'ailleurs identique à celle du n° 691.

696. Ce résultat curieux demande une explication. Supposons qu'une urne B renferme b boules de diverses couleurs et supposons qu'on tire au hasard a boules de cette urne pour les placer dans une seconde urne A.

La probabilité d'extraire m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ... de A est évidemment la même que celle d'extraire ces mêmes nombres de boules de l'urne B quand celle-ci contient encore b boules.

Lorsqu'on extrait, de l'urne A, m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., on obtient relativement, à la sortie des boules suivantes de cette urne, le même renseignement qu'on aurait obtenu pour la sortie des boules suivantes de l'urne B si l'on supposait que cette urne ait renfermé b boules et qu'on en ait extrait m_1 blanches, m_2 noires, ...

Lorsque toutes les compositions de l'urne B sont *a priori* également vraisemblables, celles de l'urne A le sont aussi.

Nous avons supposé que toutes les compositions de l'urne A étaient *a priori* également vraisemblables; nous pouvons donc supposer que cette urne a été remplie en tirant a boules au hasard dans une urne B contenant un nombre arbitraire b de boules, toutes les compositions de cette urne B étant *a priori* également vraisemblables.

Si de l'urne A on extrait m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., le renseignement qu'on obtient pour la sortie des boules suivantes

est le même que s'il s'agissait de l'urne B quand elle contient b boules, il est donc indépendant du nombre des boules contenues dans l'urne.

697. Considérons le cas où a, μ et μ' sont grands; posons $\frac{m_1}{\mu}=p_1$, $\frac{m_2}{\mu}=p_2, \ldots$; posons également

$$m_1=\mu' p_1+x_1, \qquad m_2=\mu' p_2+x_2, \qquad \ldots;$$

$x_1, x_2, \ldots$ sont les *écarts*.

Transformant alors l'expression factorielle de la probabilité en expression exponentielle, on obtient la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$; c'est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Si l'on savait que l'urne contient exactement $a-\mu$ boules dont $\frac{m_1}{\mu}(a-\mu)$ blanches, $\frac{m_2}{\mu}(a-\mu)$ noires, ..., la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ après μ' tirages serait (n° 649)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{a-\mu-\mu'}{a-\mu}}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{a-\mu-\mu'}{a-\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

L'ignorance où l'on est de la composition exacte de l'urne augmente donc les écarts dans le rapport de $\sqrt{(\mu+\mu')(a-\mu)}$ à $\sqrt{\mu(a-\mu-\mu')}$.

698. Nous avons supposé que toutes les compositions de l'urne étaient *a priori* également probables; on peut résoudre les mêmes questions en supposant que l'urne ait été remplie en tirant au hasard la couleur des boules avec la probabilité p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires, etc.

On peut obtenir sans grande difficulté la probabilité *a posteriori* pour que l'urne ait une composition donnée, puis la probabilité pour que, si l'on effectue μ' nouveaux tirages (toujours sans remettre les

boules), on obtienne m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ... Pour ce dernier problème on est conduit à cette conclusion : c'est que la probabilité a même valeur que si l'on avait tiré directement les μ' boules avec la probabilité p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires, ...

Pour expliquer ce fait, il suffit de reprendre un raisonnement précédemment employé (n° 696). L'urne A est remplie en tirant au hasard a boules d'une urne B qui en contient une infinité, les nombres des boules blanches, noires, ... de cette urne B étant proportionnels à $p_1, p_2, \ldots$.

Lorsqu'on extrait, de l'urne A, m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., on obtient relativement à la sortie des boules suivantes le même renseignement que s'il s'agissait de l'urne B. Cette dernière urne étant infinie, les sorties antérieures n'influent en rien sur les probabilités relatives aux tirages futurs ; il en est donc de même quand il s'agit de l'urne A.

On peut aller plus loin et calculer la probabilité *a posteriori* pour que l'urne A ait une composition donnée sans avoir recours à la théorie de la probabilité des causes. L'urne A étant remplie comme il a été dit, le fait d'avoir extrait de cette urne m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., m_n boules vertes ne change en rien les probabilités relatives aux $a - m_1 - m_2 - \ldots - m_n$ autres boules ; la probabilité pour que, parmi celles-ci, il y ait z_1 boules blanches, z_2 boules noires, ..., z_n boules vertes $(z_1 + z_2 + \ldots + z_n = a - m_1 - m_2 - \ldots - m_n)$ est donc, *a posteriori* comme *a priori*,

$$\frac{(a - m_1 - m_2 - \ldots - m_n)!}{z_1!\, z_2! \ldots z_n!} p_1^{z_1} p_2^{z_2} \ldots p_n^{z_n}.$$

Telle est la probabilité *a posteriori* pour que l'urne renferme $m_1 + z_1$ boules blanches, $m_2 + z_2$ boules noires, ...

699. *Une urne contient un très grand nombre a de boules de n couleurs différentes, blanches, noires, ..., vertes, dans une proportion inconnue.*

L'urne a été remplie en tirant les boules au hasard avec la probabilité p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires, ..., p_n pour les vertes.

On tire successivement μ boules de l'urne en remettant après chaque

tirage la boule sortie. On obtient m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., m_n boules vertes. Quelle est la probabilité pour que l'urne ait une composition donnée ?

La probabilité *a priori* pour que l'urne renferme $ap_1 + z_1$ boules blanches, $ap_2 + z_2$ boules noires, ..., $ap_n + z_n$ boules vertes est (n° 645)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2a}\left[\frac{z_1^2}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{z_n^2}{p_n}\right]}}{(\sqrt{2\pi a})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}.$$

Dans ces conditions, la probabilité pour extraire une blanche est $\frac{ap_1+z_1}{a}$, pour extraire une noire $\frac{ap_2+z_2}{a}$, ..., et la probabilité de l'événement observé est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu a}\left\{\frac{[am_1-\mu(ap_1+z_1)]^2}{ap_1+z_1}+\frac{[am_2-\mu(ap_2+z_2)]^2}{ap_2+z_2}+\ldots\right\}}}{\sqrt{a}(\sqrt{2\pi\mu a})^{n-1}\sqrt{(ap_1+z_1)(ap_2+z_2)\ldots}}.$$

a étant un très grand nombre, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont très petits auprès de $ap_1, ap_2, \ldots, ap_n$.

Négligeant les termes en z dans le dénominateur de l'exponentielle, l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu a^2}\left\{\frac{[am_1-\mu(ap_1+z_1)]^2}{p_1}+\frac{[am_2-\mu(ap_2+z_2)]^2}{p_2}+\ldots\right\}}}{a^n(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}},$$

et la probabilité demandée a pour valeur

$$\frac{e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{(\mu+a)z_1^2-2am_1z_1}{p_1}+\frac{(\mu+a)z_2^2-2am_2z_2}{p_2}+\ldots\right]}}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{(\mu+a)z_1^2-2am_1z_1}{p_1}+\frac{(\mu+a)z_2^2-2am_2z_2}{p_2}+\ldots\right]}dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}}.$$

Occupons-nous de l'intégrale. Posons

$$m_1 = \mu p_1 + u_1, \qquad m_2 = \mu p_2 + u_2, \qquad \ldots.$$

Les u sont du même ordre que les z si μ est très grand et du même ordre que a.

L'intégrale devient

$$e^{\frac{\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+}{2(\mu+a)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2a^2}\left\{\frac{\left[\sqrt{\mu+a}\,z_1-\frac{au_1}{\sqrt{\mu+a}}\right]^2}{p_1}+\frac{\left[\sqrt{\mu+a}\,z_2-\frac{au_2}{\sqrt{\mu+a}}\right]^2}{p_2}+\ldots\right\}}dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}.$$

En posant

$$\sqrt{\mu+a}\,z_1-\frac{au_1}{\sqrt{\mu+a}}=\eta_1,\qquad \sqrt{\mu+a}\,z_2-\frac{au_2}{\sqrt{\mu+a}}=\eta_2,\qquad \ldots$$

elle se réduit à

$$\frac{e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left[\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+\ldots\right]}}{\left(\sqrt{\mu+a}\right)^{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{\eta_1^2}{p_1}+\frac{\eta_2^2}{p_2}+\ldots\right]}d\eta_1\,d\eta_2\ldots d\eta_{n-1}.$$

La somme des η_i étant nulle, cette dernière intégrale a pour valeur, d'après la formule du n° 647,

$$a^{n-1}\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}.$$

L'intégrale a donc pour valeur

$$\left(\frac{a\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu+a}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}\,e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left[\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+\ldots\right]}$$

ou

$$\left(\frac{a\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu+a}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}\,e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left[\frac{(m_1-\mu p_1)^2}{p_1}+\frac{(m_2-\mu p_2)^2}{p_2}+\ldots\right]},$$

et *la probabilité cherchée pour que l'urne renferme* ap_1+z_1 *boules blanches,* ap_2+z_2 *boules noires, . . . est*

$$\left(\frac{\sqrt{\mu+a}}{a\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}\,e^{\frac{\mu^2}{2(\mu+a)}-\frac{1}{2(\mu+a)}\left[\frac{m_1^2}{p_1}+\frac{m_2^2}{p_2}+\ldots\right]-\frac{\mu+a}{2a^2}\left[\frac{z_1^2}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}+\ldots\right]+\frac{1}{a}\left[\frac{m_1z_1}{p_1}+\frac{m_2z_2}{p_2}+\ldots\right]}dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}.$$

La plus grande probabilité a lieu pour

$$z_1=\frac{a(m_1-\mu p_1)}{a+\mu},\qquad z_2=\frac{a(m_2-\mu p_2)}{a+\mu},\qquad \ldots$$

700. Désignons par P_1 la probabilité pour que, si l'on fait un tirage,

il sorte de l'urne une boule blanche, par P_2 la probabilité correspondante pour une boule noire, etc. Si les écarts sont z_1, z_2, ... les probabilités P_1, P_2, ... sont

$$P_1 = \frac{ap_1 + z_1}{a}, \qquad P_2 = \frac{ap_2 + z_2}{a}, \qquad \dots.$$

La plus grande probabilité *a posteriori* a lieu quand

$$z_1 = \frac{a(m_1 - \mu p_1)}{a+\mu}, \qquad z_2 = \frac{a(m_2 - \mu p_2)}{a+\mu}, \qquad \dots,$$

c'est-à-dire quand les quantités P_1, P_2, ... ont les valeurs

$$P'_1 = p_1 + \frac{m_1 - \mu p_1}{a+\mu}, \qquad P'_2 = p_2 + \frac{m_2 - \mu p_2}{a+\mu}, \qquad \dots;$$

P_1, P_2, ... diffèrent peu de P'_1, P'_2, ... Posons

$$P_1 = P'_1 + \varepsilon_1, \qquad P_2 = P'_2 + \varepsilon_2, \qquad \dots.$$

On en déduit

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu p_1 - m_1}{a+\mu} + \frac{z_1}{a}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\mu p_2 - m_2}{a+\mu} + \frac{z_2}{a}, \qquad \dots.$$

Remplaçant alors, dans l'expression de la probabilité *a posteriori*, les z par les ε, on obtient

$$\frac{\left(\sqrt{a+\mu}\right)^{n-1} e^{-\frac{a+\mu}{2}\left[\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\dots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}.$$

Telle est la probabilité pour que P_1 ait la valeur $P'_1 + \varepsilon_1$, P_2 la valeur $P'_2 + \varepsilon_2$ ....

701. Si l'on effectue μ' nouveaux tirages (toujours en remettant après chaque tirage la boule sortie), la probabilité pour obtenir $\mu' P'_1 + x_1$ boules blanches, $\mu' P'_2 + x_2$ boules noires, ..., c'est-à-dire la probabilité pour que les *écarts* soient x_1, x_2, ..., x_n, a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{a+\mu+\mu'}{a+\mu}}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\dots+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{a+\mu+\mu'}{a+\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}.$$

TABLE

DES

VALEURS DE L'INTÉGRALE

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2} dy.$$

y.	Θ.	y.	Θ.	y.	Θ.
0,00.......	0,0000000	0,23......	0,2550225	0,46.......	0,4846555
0,01.......	0,0112833	0,24.......	0,2657000	0,47.......	0,4937452
0,02.......	0,0225644	0,25.......	0,2763263	0,48.......	0,5027498
0,03.......	0,0338410	0,26.......	0,2868997	0,49.......	0,5116683
0,04.......	0,0451109	0,27.......	0,2974182	0,50.......	0,5204999
0,05.......	0,0563718	0,28.......	0,3078800	0,51.......	0,5292437
0,06.......	0,0676215	0,29.......	0,3182834	0,52.......	0,5378987
0,07.......	0,0788577	0,30.......	0,3286267	0,53.......	0,5464641
0,08.......	0,0900781	0,31.......	0,3389081	0,54.......	0,5549392
0,09.......	0,1012806	0,32.......	0,3491259	0,55.......	0,5633233
0,10.......	0,1124630	0,33.......	0,3592785	0,56.......	0,5716157
0,11.......	0,1236230	0,34.......	0,3693644	0,57.......	0,5798158
0,12.......	0,1347584	0,35.......	0,3793819	0,58.......	0,5879229
0,13.......	0,1458671	0,36.......	0,3893296	0,59.......	0,5959365
0,14.......	0,1569470	0,37.......	0,3992059	0,60.......	0,6038561
0,15.......	0,1679959	0,38.......	0,4090093	0,61.......	0,6116812
0,16.......	0,1790117	0,39.......	0,4187385	0,62.......	0,6194114
0,17.......	0,1899923	0,40.......	0,4283922	0,63.......	0,6270463
0,18.......	0,2009357	0,41.......	0,4379690	0,64.......	0,6345857
0,19.......	0,2118398	0,42.......	0,4474676	0,65	0,6420292
0,20.......	0,2227025	0,43.......	0,4568867	0,66.......	0,6493765
0,21.......	0,2335218	0,44.......	0,4662251	0,67.......	0,6566275
0,22.......	0,2442958	0,45.......	0,4754818	0,68.......	0,6637820

x.	θ.	x.	θ.	x.	θ.
0,69	0,6708399	1,15	0,8961238	1,61	0,9772069
0,70	0,6778010	1,16	0,8990962	1,62	0,9780381
0,71	0,6846654	1,17	0,9020004	1,63	0,9788429
0,72	0,6914330	1,18	0,9048374	1,64	0,9796218
0,73	0,6981038	1,19	0,9076083	1,65	0,9803756
0,74	0,7046780	1,20	0,9103140	1,66	0,9811049
0,75	0,7111556	1,21	0,9129555	1,67	0,9818104
0,76	0,7175367	1,22	0,9155339	1,68	0,9824928
0,77	0,7238216	1,23	0,9180501	1,69	0,9831526
0,78	0,7300104	1,24	0,9205052	1,70	0,9837904
0,79	0,7361035	1,25	0,9229001	1,71	0,9844070
0,80	0,7421010	1,26	0,9252359	1,72	0,9850028
0,81	0,7480033	1,27	0,9275136	1,73	0,9855785
0,82	0,7538108	1,28	0,9297342	1,74	0,9861346
0,83	0,7595238	1,29	0,9318987	1,75	0,9866717
0,84	0,7651427	1,30	0,9340080	1,76	0,9871903
0,85	0,7706680	1,31	0,9360632	1,77	0,9876910
0,86	0,7761002	1,32	0,9380652	1,78	0,9881742
0,87	0,7814398	1,33	0,9400150	1,79	0,9886406
0,88	0,7866873	1,34	0,9419137	1,80	0,9890905
0,89	0,7918432	1,35	0,9437622	1,81	0,9895245
0,90	0,7969082	1,36	0,9455614	1,82	0,9899431
0,91	0,8018828	1,37	0,9473124	1,83	0,9903467
0,92	0,8067677	1,38	0,9490160	1,84	0,9907359
0,93	0,8115635	1,39	0,9506733	1,85	0,9911110
0,94	0,8162710	1,40	0,9522851	1,86	0,9914725
0,95	0,8208908	1,41	0,9538524	1,87	0,9918207
0,96	0,8254236	1,42	0,9553762	1,88	0,9921562
0,97	0,8298703	1,43	0,9568573	1,89	0,9924793
0,98	0,8342315	1,44	0,9582966	1,90	0,9927904
0,99	0,8385081	1,45	0,9596950	1,91	0,9930899
1,00	0,8427008	1,46	0,9610535	1,92	0,9933782
1,01	0,8468105	1,47	0,9623729	1,93	0,9936557
1,02	0,8508380	1,48	0,9636541	1,94	0,9939229
1,03	0,8547842	1,49	0,9648979	1,95	0,9941794
1,04	0,8586499	1,50	0,9661052	1,96	0,9944263
1,05	0,8624360	1,51	0,9672768	1,97	0,9946637
1,06	0,8661435	1,52	0,9684135	1,98	0,9948920
1,07	0,8697732	1,53	0,9695162	1,99	0,9951114
1,08	0,8733261	1,54	0,9705857	2,00	0,9953223
1,09	0,8768030	1,55	0,9716227	2,01	0,9955248
1,10	0,8802050	1,56	0,9726281	2,02	0,9957195
1,11	0,8835330	1,57	0,9736026	2,03	0,9959063
1,12	0,8867879	1,58	0,9745470	2,04	0,9960858
1,13	0,8899707	1,59	0,9754620	2,05	0,9962581
1,14	0,8930823	1,60	0,9763484	2,06	0,9964235

y.	θ.	y.	θ.	y.	θ.
2,07	0,9965822	2,53	0,9996537	2,99	0,9999765
2,08	0,9967344	2,54	0,9996720	3,00	0,9999779
2,09	0,9968805	2,55	0,9996893	3,01	0,9999793
2,10	0,9970205	2,56	0,9997058	3,02	0,9999805
2,11	0,9971548	2,57	0,9997215	3,03	0,9999817
2,12	0,9972836	2,58	0,9997364	3,04	0,9999829
2,13	0,9974070	2,59	0,9997505	3,05	0,9999839
2,14	0,9975253	2,60	0,9997640	3,06	0,9999849
2,15	0,9976386	2,61	0,9997767	3,07	0,9999859
2,16	0,9977472	2,62	0,9997888	3,08	0,9999867
2,17	0,9978511	2,63	0,9998003	3,09	0,9999876
2,18	0,9979505	2,64	0,9998112	3,10	0,9999884
2,19	0,9980459	2,65	0,9998215	3,11	0,9999891
2,20	0,9981372	2,66	0,9998313	3,12	0,9999898
2,21	0,9982244	2,67	0,9998406	3,13	0,9999904
2,22	0,9983079	2,68	0,9998494	3,14	0,9999910
2,23	0,9983878	2,69	0,9998578	3,15	0,9999916
2,24	0,9984642	2,70	0,9998657	3,16	0,9999921
2,25	0,9985373	2,71	0,9998732	3,17	0,9999926
2,26	0,9986071	2,72	0,9998803	3,18	0,9999931
2,27	0,9986739	2,73	0,9998870	3,19	0,9999936
2,28	0,9987377	2,74	0,9998933	3,20	0,9999940
2,29	0,9987986	2,75	0,9998994	3,21	0,9999944
2,30	0,9988568	2,76	0,9999051	3,22	0,9999947
2,31	0,9989124	2,77	0,9999105	3,23	0,9999951
2,32	0,9989655	2,78	0,9999156	3,24	0,9999954
2,33	0,9990162	2,79	0,9999204	3,25	0,9999957
2,34	0,9990646	2,80	0,9999250	3,26	0,9999960
2,35	0,9991107	2,81	0,9999293	3,27	0,9999962
2,36	0,9991548	2,82	0,9999334	3,28	0,9999965
2,37	0,9991968	2,83	0,9999372	3,29	0,9999967
2,38	0,9992369	2,84	0,9999409	3,30	0,9999969
2,39	0,9992751	2,85	0,9999443	3,31	0,9999971
2,40	0,9993115	2,86	0,9999476	3,32	0,9999973
2,41	0,9993462	2,87	0,9999507	3,33	0,9999975
2,42	0,9993793	2,88	0,9999536	3,34	0,9999977
2,43	0,9994108	2,89	0,9999563	3,35	0,9999978
2,44	0,9994408	2,90	0,9999589	3,36	0,9999980
2,45	0,9994694	2,91	0,9999613	3,37	0,9999981
2,46	0,9994966	2,92	0,9999636	3,38	0,9999982
2,47	0,9995226	2,93	0,9999658	3,39	0,9999984
2,48	0,9995472	2,94	0,9999679	3,40	0,9999985
2,49	0,9995707	2,95	0,9999698	3,41	0,9999986
2,50	0,9995930	2,96	0,9999716	3,42	0,9999987
2,51	0,9996143	2,97	0,9999733	3,43	0,9999988
2,52	0,9996345	2,98	0,9999750	3,44	0,9999989
				3,45	0,9999899

x.	θ.	x.	θ.	x.	θ.
3,46...	0,99999900780	3,67...	0,99999978990	3,88...	0,99999995915
3,47...	0,99999907672	3,68...	0,99999980528	3,89...	0,99999996230
3,48...	0,99999914101	3,69...	0,99999981957	3,90...	0,99999996522
3,49...	0,99999920097	3,70...	0,99999983285	3,91...	0,99999996790
3,50...	0,99999925691	3,71...	0,99999984517	3,92...	0,99999997039
3,51...	0,99999930905	3,72...	0,99999985663	3,93...	0,99999997260
3,52...	0,99999935766	3,73...	0,99999986726	3,94...	0,99999997482
3,53...	0,99999940296	3,74...	0,99999987712	3,95...	0,99999997678
3,54...	0,99999944519	3,75...	0,99999988629	3,96...	0,99999997860
3,55...	0,99999948452	3,76...	0,99999989477	3,97...	0,99999998028
3,56...	0,99999952115	3,77...	0,99999990265	3,98...	0,99999998183
3,57...	0,99999955527	3,78...	0,99999990995	3,99...	0,99999998327
3,58...	0,99999958703	3,79...	0,99999991672	4,00...	0,99999998459
3,59...	0,99999961661	3,80...	0,99999992200	4,10...	0,99999999330
3,60...	9,99999964414	3,81...	0,99999992881	4,20...	0,99999999714
3,61...	0,99999966975	3,82...	0,99999993421	4,30...	0,99999999880
3,62...	0,99999969358	3,83...	0,99999993921	4,40...	0,99999999951
3,63...	0,99999971574	3,84...	0,99999994383	4,50...	0,99999999981
3,64...	0,99999973636	3,85...	0,99999994812	4,60...	0,99999999992
3,65...	0,99999975551	3,86...	0,99999995208	4,70...	0,99999999997
3,66...	0,99999977333	3,87...	0,99999995575	4,80...	0,99999999999



TABLE DES MATIÈRES.

46829 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

